

Analyse réelle et Intégrales

Il ne suffit pas de *lire* que les démonstrations mathématiques sont belles ; le côté papier-crayon, modélisation théorique, qui occupe une grande partie de mon existence, m'oblige à participer au jeu. Je veux descendre sur le pré pour les vivre, goûter, tester, car les stratégies se jugent sur le terrain. …. Toute connaissance que n'a pas précédée une sensation m'est inutile.

Je n'ai jamais rien vu de lucidement beau dans l'univers mathématique, sans désirer aussitôt que toute ma tendresse le touche. En accueillant authentiquement dans mon petit grenier de sentiment et de compréhension l'amoureuse beauté de *l'analyse réelle* et *intégrales*, je puis dire que, l'effloraison de sa surface est merveilleuse. Je garderais pour longtemps en mémoire, ce paysage où mon désir s'est enfoncé ; ce pays ouvert où ma recherche se promène ; allée de **Taylor Lagrange** qui se referme sur les *accroissements finis* et se prolonge sur **Rolle** et le *théorème des valeurs intermédiaires* ; continuité des roseaux courbés uniformément sur la rivière d'un *compact métrique* ; ouvertures sur la *théorie des ensembles* ; apparition de la *convexité* dans l'embrasure des branchages. On peut y voir la courbure d'un objet sensuel par rapport à la tangente et répondre à cette question palpitante : au fait, à quelle vitesse ? Bref que de promesses illimitées. Je me suis promené dans les couloirs de fonctions et de belles formes sensuelles. J'ai vu se dérouler des printemps.

Dès ce jour, chaque instant de ma vie prit pour moi la saveur de nouveauté d'un don absolument ineffable. Ainsi je vécus dans une presque perpétuelle stupéfaction passionnée. J'arrivais très vite à l'ivresse et me plaisais à marcher dans une sorte

d'étourdissement. J'ai porté hardiment ma main sur chaque concept de l'analyse réelle et me suis cru des droits sur chaque objet de mes désirs.

Les concepts qui vont surgir savent de nous ce que nous ignorons d'eux.

Lorsque l'acte du mathématicien fait l'objet d'une rencontre _ et ce sont la pleine teneur et les rites de cette rencontre que je tiens à explorer _, lorsqu'il pénètre dans les quartiers spatiaux et temporels, mentaux et physiques, de notre être, il apporte avec lui un appel radical au changement. L'éveil, l'enrichissement, la complication, l'obscurcissement, la mise en question de la sensibilité et de la compréhension qui découlent de notre expérience du concept, sont gros d'action potentielle. En un sens entièrement fondamental et pragmatique, le théorème, la définition, le corollaire, ne sont pas tant lu, contemplé ou écouté qu'ils sont *vécus.* La rencontre du concept est, de même que certains modes d'expérience religieuse et métaphysique, l'injonction la plus pénétrante à la transformation dont dispose l'expérience humaine. Ici aussi, l'image en résumé est celle d'une gravité qui force son entrée dans la petite demeure de notre être précautionneux. Si nous avons entendu correctement le battement d'ailes et la provocation de cette visite, notre demeure ne peut plus être habitée exactement de la même manière qu'auparavant. L'intrusion d'une maîtrise a modifié la lumière.

L'école étant, par excellence, le lieu où l'on doit apprendre à lire, voyons dans le résumé ci-dessous, en quoi l'*Analyse réelle* et *Intégrales* est un élargissement, à tous les sens du terme. Une manière de mettre l'admiration au cœur du projet éducatif.
Un sorte d'émerveillement initiatique, qui dépayse les étudiants et de les transporte hors d'eux-mêmes.

Faisons d'abord le point sur ce qui est déjà connu.

Ne pas oublier que le corps des réels est le seul corps ordonné valué complet. C'est dire l'importance de la relation d'ordre sur les réels, et de l'aspect suites de Cauchy, convergence par critère de Cauchy.

S'y ajoute bien sûr la connaissance de la topologie de $\mathbb{R}$, avec

$$\begin{cases} \text{K compact de } \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{K fermé borné} \\ \text{K complet de } \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{K fermé} \\ \text{K connexe de } \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{K intervalle de } \mathbb{R} \end{cases}.$$

Voyons en quoi la structure d'ordre intervient.

Par exemple, par l'étude du trinôme, qui ne sert pas qu'à justifier Cauchy Schwarz, (voir exercice).

Ou bien, pour établir des inégalités du type $u(a) \leq v(a)$, en justifiant $u(x) \leq v(x)$ pour x dans un intervalle contenant a, et ce en étudiant les variations de la fonction $v - u$, (voir exercice).

Dans les questions liées à la convexité, (voir exercice).

Dans tout raisonnement où l'on procède par des encadrements pour obtenir des limites, ce qui intervient en particulier dans les recherches d'équivalents, (voir exercice).

Dans la formule de **Taylor Lagrange**, ($\exists\ c\ \in]a, b[$ tel que …), conséquence des accroissements finis, donc de **Rolle**, donc du **Théorème des valeurs intermédiaires** : f continue sur un intervalle ne pas changer de signe sans s'annuler.

Penser en particulier qu'un polynôme réel de degré impair s'annule.

Penser aussi qu'une fonction f, n fois dérivable, ayant $n+1$ zéros au moins, donnera n intervalles pour appliquer Rolle d'où n zéros de f' , $n-1$ de f'' ,…, et finalement 1 pour $f^{(n)}$, (voir exercice).

Ne pas oublier enfin, les **formules de la moyenne** pour les intégrales sur un segment, qui toutes font intervenir des inégalités sur $\mathbb{R}$ pour être justifiées ;
Mais surtout le fait que l'intégrale, agissant sur les fonctions considérées comme variables, est une *forme linéaire positive*, donc préserve les inégalités entre fonctions.

Toujours penser que sur un compact métrique, la continuité est uniforme (Théorème de Heine, pour f à valeurs dans F métrique), et de plus si f est à valeurs réelles, les bornes sont atteintes, (voir exercice).

Ne pas oublier :

– Partant de la théorie des ensembles, l'introduction des cardinaux permet de construire $\mathbb{N}$ ensemble des entiers naturels. L'étude des structures de groupe conduit à symétriser $\mathbb{N}$ pour obtenir l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs. La structure d'anneau et de corps donnera alors le corps des $\mathbb{Q}$ rationnels. Puis on passe de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$ par complétion et de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$ par corps de rupture qui est en même temps une

clôture algébrique, signalons que la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ n'est pas $\mathbb{C}$: des nombres transcendants comme e et π ne sont pas algébriques sur $\mathbb{Q}$.

- De plus, on démontre que le cardinal de la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ est celui de $\mathbb{Q}$ c'est-à-dire que ce corps est dénombrable.
- La linéarité, (voir bilinéarité) dans les intégrales, cela sert à simplifier les calculs entre autre ;
- Les équivalents, s'intègrent très bien ;
- La règle de l'Hospital (Guillaume François Antoine, 1661-1704) _ je préfère préciser ce point car on se demande toujours s'il n'y a pas quelque chose de maladif là-dessous _ généralisée sert souvent pour les équivalents, (justifiez en bien les hypothèses ;
- Le bon vieux Taylor Young et Leibniz,
- La convexité, avec la place de la courbe par rapport à la corde, et par rapport à la tangente, ainsi que la croissance de la dérivée, voilà une valeur sûre.

Quelques idées utiles

Dans la recherche d'un équivalent du terme général U_n d'une suite monotone qui converge vers 0, ou d'un équivalent de $U_n - \lambda$ si elle converge vers λ, l'utilisation d'un équivalent du terme général

$x_n = u_{n+1} - u_n$ de la série associée eut servir. On suppose donc x_n équivalent à y_n.

1°) *Si la série des x_n converge*, la suite des U_n converge.

Supposons d'abord qu'elle converge vers 0. Alors le reste de la série des x_n, qui vaut :

$$R_{n-1} = \sum_{p=n}^{+\infty} (u_{p+1} - u_p) = -U_n \text{ est équivalent au reste } S_{n-1} = \sum_{p=n}^{+\infty} y_p .$$

Si la suite des U_n converge vers $\lambda \neq 0$, en posant $v_n = u_n - \lambda$, on a $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n$, donc

$R_n = -v_n$, et cette technique donne un équivalent de $u_n - \lambda$.

La question 3° de l'exercice II utilise le Théorème d'interversion des limites, d'emploi facile sur $\mathbb{R}$, par l'utilisation de la relation d'ordre et de la monotonie des suites.

Penser aux liens entre suite et série, aux suites extraites, surtout dans des suites monotones.

Parfois, un calcul direct avec les formules liées aux suites arithmétiques ou géométriques conviendra très bien.

Quand on évalue une somme s_n de termes $u(k, n)$, k variant, et que l'on cherche la limite des s_n : on a de « plus en plus de termes, chacun fonction de n ; on peut être tenté de se ramener à une somme finie, si on peut majorer uniformément la somme des autres.



Étude des séries entières

Les *séries entières* ont des vertus différentes. Leur définition qui nous paraît simple, est subtile et nous invite à ressentir les ressources du sens à l'œuvre sous la surface. Ses propriétés relationnelles se tiennent l'une à l'autre, toutes attachées, par des liens qui sont des vertus et des forces, de sorte que l'une dépend de l'autre et que l'autre dépend de toutes. La route de chacune est tracée et chacune trouve sa route. Elle ne saurait en changer sans en distraire aucune autre, chacune étant de chaque autre occupée. Leur choix fixe les lois, et nous _ lecteurs-grammairiens_ dépendons d'elles.

Mais notre éducation conventionnelle, nous permet-elle encore de procéder à l'analyse grammaticale d'une phrase simple, ou décomposer les fonctions des parties du discours ? C'est pourtant ce qui faisait autrefois partie du *b.a.-ba* scolaire. Innocents que nous sommes quant à la sensibilité et à la formation du concept, nous ne remarquons qu'à peine les tensions dynamiques qu'entretiennent les éléments conservateurs du langage mathématique _ qui cherchent leur légitimité dans le précédent et l'utile fiction de la « correction » _ avec ce qui est illicite, mais créateur et novateur. Une grammaticalité authentique de la compréhension est aux antipodes d'une fidélité insensible et naïve à des règles durables (il n'en existe pas d'éternelles).

C'est au contraire une perception fascinée et informée de ce qui se modifie dans l'anatomie du style et du discours, dans les grammaires de la tonalité et de l'atonalité en musique. Les grammaires sont en vie, elles se rebellent. Efforçons-nous toujours de communiquer avec les concepts que nous véhiculons.

Et n'oublions pas que toute visitation, tout acte de communication contient une part de rhétorique, la rhétorique est l'art de charger d'effets de signification les unités

lexicales et grammaticales du discours. Le processus de persuasion de chaque théorie se fonde sur sa grammaire propre.

Il est bon de rappeler, ne serait-ce que pour le sentiment de quiétude que cela procure, qu'une théorie mathématique nous raconte des histoires pour que nous cessions de nous raconter des histoires.

Essayons de comprendre, qu'aucune analyse, aucun aphorisme, quelque profonds soient-ils, ne peuvent se comparer en plénitude et en intensité à une histoire bien racontée. Que devrions-nous retenir sur les séries entières ?

Résumé

Le premier problème qui se pose est celui de la *détermination du rayon de convergence*, et du domaine de convergence, de la série des $a_n z^n$.

Comme pour $|z| < R$ la convergence est absolue, on travaille sur un équivalent de $|a_n|$. Ne pas oublier de préciser le comportement de la série sur le bord du disque, souvent par le *critère d'Abel.*
Les séries entière s'intégrant et se dérivant terme à terme sans modification du rayon de convergence, ne pas oublier que des encadrements même grossières de $|a_n|$, du type $0 \leq u_n \leq |a_n| \leq v_n$ avec $\Sigma u_n z^n$ diverge pour $|z| > a$ et $\Sigma v_n z^n$ converge pour $|z| < a$ permettent de conclure à $R = a$.

Il peut se faire que la convergence, et la détermination du rayon de convergence d'une série entière provienne d'autres arguments, du type équation différentielle, ou fonctionnelle.

Enfin Taylor Lagrange est toujours d'actualité.

Vient ensuite *la détermination de la somme*, souvent à l'aide des fonctions usuelles.

On se tire d'affaire en utilisant les propriétés algébriques sur les séries entières : somme, (ou combinaison linéaire) de séries entières ; dérivation ou intégration de séries connues, produit de séries entières, tous ces procédés pouvant se combiner. En particulier la dérivée de Arctg$u(x)$, $\frac{u'}{1+u^2}$, sera une fraction rationnelle si en est une, d'où un calcul possible.

De même, si on considère $\Sigma\, a_n x^n$, avec a_n fraction rationnelle en n, on peut la décomposer en éléments simples …

Se pose aussi le *problème du développement en séries entières* d'une fonction *f*, et là, bien souvent les arguments liés aux équations différentielles interviennent, *f* intervenant comme la solution répondant à une donnée initiale, et une série entière déterminée terme à terme convenant aussi. C'est la connaissance de *Cauchy Lipschitz* qui donne la réponse.

Il reste toutes les questions liées à l'analycité, du type zéros isolés à l'intérieur du domaine ouvert de convergence, ce qui conduit à la détermination intégrale des a_n *sous la forme :* $a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz$, ***(formule de Cauchy)****, avec* γ *cercle de centre 0, de rayon* $r < R$*, dans* $\mathbb{C}$*, orienté dans le sens direct.*

*Enfin un détour par les **séries de Fourier** vaut la peine, car si on a une série entière* $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *, de rayon de convergence* $R > 0$*, pour chaque* $r \in [0, R[$*, on dispose d'une série trigonométrique* $S_r(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{in\theta}$ *fonction de classe* C^{∞} *en fait, dont on connaît la série de Fourier, d'où Bessel…*

Quelques compléments.

Définition du logarithme complexe.

Ne pas oublier qu'une transformation d'Abel comme toujours dans les séries, peut servir. Elle est basée sur la présence d'un terme, u_n, différent de deux choses consécutives : $u_n = a_n - a_{n-1}$, et d'une interversion de deux sommations. Pensez à $1 = (n + 1) - n$, (eh oui), ou bien à a différence de deux sommes partielles consécutives d'une série.

Penser aux interversions de sommations dans les sommes doubles.

Les progressions géométriques ça c'est quelque chose !

Ré-érotiser l'acte de connaître, c'est aussi favoriser un certain foisonnement de l'imaginaire, c'est jouer avec les idées, méditer les concepts, en créer de nouveaux, saisir leur portée, expliciter leur sens. Cette dimension à la fois créatrice et réflexive est vitale, car elle constitue le préalable à toute transmission efficace des connaissances : lorsque cette « épaisseur » leur fait défaut, la capacité des chercheurs et des professeurs à se positionner dans les diverses situations humaines engageant les sciences s'en trouve singulièrement écornée, tout comme leur aptitude à présenter ou à enseigner leur savoir comme une véritable aventure intellectuelle. Il faut donc la réhabiliter…

Une étude non exhaustive de fonctions définies par une relation du type $\mathbf{F}(x) = \int_a^{+\infty} f(x, t)dt$ pour x dans **I** intervalle de $\mathbb{R}$ et f fonction de $\mathbf{I} \times [a, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$

Est solaire tout ce qui s'oppose au nocturne, d'où mon slogan : ***We belong to those who reject darkness.*** Solaires, la vie, le désir et les plaisirs complices, la jubilation, l'incandescence dans la volonté de jouissance ; solaires le souci radieux, la prévenance exacerbée, la courtoisie ; solaires la douceur et la délicatesse, l'âme chevaleresque et la politesse de la rigueur. Et j'aimerais dire enfin pourquoi pour moi, l'*analyse fonctionnelle* est solaire. Devant une baie de cette théorie, les théorèmes sont pendus à des ficelles ; chaque concept médite et mûrit, rumine en secret la lumière ; il élabore un miel parfumé. *Interversion de limites*. Amoncellement du *théorème de convergence dominée*. Théorèmes ! j'ai mangé votre pulpe juteuse. J'ai rejeté les pépins sur terre ; qu'ils germent ! pour nous redonner le plaisir.

Recherche délicate d'*équivalents* ; promesse de merveille ; *dérivabilité* ; petit printemps qui dort en attendant. Concepts entre deux étés ; concept par l'été traversé.

Nous songerons ensuite, mes amis, à la germination douloureuse (la sueur de l'âme pour prouver l'existence d'une intégrale impropre est admirable).
Mais émerveillons-nous à présent de ceci : chaque fécondation s'accompagne de volupté. Le théorème s'enveloppe de saveur ; et de plaisir toute persévérance à la vie.

Pulpe de théorèmes, preuve sapide de l'amour. La *théorie d'analyse fonctionnelle* est tout entière variation sur le thème de l'ange, forme ailée du principe de délicatesse _ dont l'étymologie nous enseigne, comme une récurrence, la parenté avec ce qui rend liquide, fluidifie, vaporise jusqu'à l'éther. J'essaierais ici, de dire l'essentiel de cette

belle théorie, dans un style qui magnifie le raffinement sans l'excès d'apprêt, la recherche sans la complexion maniérée, l'élégance sans l'affectation, la grâce et la subtilité sans l'inconsistance. Je me contenterai d'impulsion de direction volontaire. Délicatesse, politesse de la rigueur, bonne distance entre le réel et le concept.

Pourquoi ? Eh bien parce que l'histoire que nous raconte la *théorie d'analyse fonctionnelle*, déchire le rideau de préinterprétations suspendu devant le monde. Mais ce rideau est lui-même tissé de récits innombrables, d'où l'importance cruciale de la valeur, du jugement de goût…

Que vienne le temps de ceux qui savent *entendre*, car avec, eux, l'oreille pourrait bientôt servir à *mieux lire*…

Un recours naturel et permanent à l'*analyse fonctionnelle*, nous permet d'*entendre* l'évolution, faite de continuité et de changement, que connaissent les concepts eux-mêmes, ainsi que les *corpus* des énoncés qu'animent ces concepts.

Il faut une indéniable musicalité de l'entente interprétative, une oreille attentive aux accords temporels, tels que nous les trouvons chez **Lebesgue**, chez **Riemann**, chez **Banach** ou chez **Abel**, pour entendre, pour enregistrer, avec une parfaite ou presque parfaite précision, la vie temporelle et structurelle des concepts. Il faut écouter attentivement *la théorie des fonctions définies par des intégrales à paramètre*, le dialogue théâtral, la description conceptuelle pour glaner d'un simple mot ou d'une simple expression toute la récolte de l'histoire qui les précède, des transmutations qui se sont opérées dans les connotations et même dans les significations originelles.

Applied Mathematics

Peu à peu, se développe la finesse de notre réception. Nous finissons par identifier le germe de nouveauté, d'appropriation personnelle et de réorientation qu'un concept ou une définition peuvent recevoir lorsqu'ils sont utilisés par tel ou tel Mathématicien, par telle ou telle dynamique délibérée d'une théorie particulière. On en retire un inestimable profit de compréhension (d'intensité de rencontre).

Par le biais du tact conceptuel, le lecteur-auditeur arrive à distinguer, de manière presque subliminale, le poids, les rugosités, la portée, les connotations d'un même concept _ mais ce n'est pas le même _ qu'il trouve dans un **théorème de Lebesgue**, ou de **Riemann**. C'est la théorie qui nous apprend à quels moments après **Riemann** le concept de « *d'interversion d'une limite*» acquiert une nouvelle tonalité, ou à quels carrefours après **Lebesgue** le concept « *d'intégrabilité* » change de fréquence, de densité et d'écho.

Qu'est-ce qu'enseigner si ce n'est faire faire à l'étudiant un peu d'économie de l'histoire qui a permis de construire les savoirs qui vont lui être transmis ? Le moment est donc venu de filtrer les théorèmes essentiels pour la résolution des intégrales impropres.

La convergence uniforme sert souvent à justifier des interversions de limites mais attention : cela ne suffit pas pour intervertir une limite de fonctions, (ou une somme de séries) et une intégrale sur un intervalle non borné, I.

En fait pour justifier que $\int_I (\lim u_n) = \lim \int_I u_n$, dans ce cas on utilise un raisonnement basé sur la « **convergence dominée** » du Théorème de Lebesgue, c'est-

à-dire la présence en facteur des u_n, (et de la limite u) d'une fonction indépendante de n, qui assure la convergence des intégrales impropres. (*voir exercices*)

On peut aussi essayer de justifier le **Théorème d'interversion des limites**.

Dans le cas particulier d'une intégrale de série, penser aux **séries alternées** ou aux **progressions géométriques** qui donnent un majorant, (ou un calcul) du reste, et permettent de conclure en justifiant directement que $\int_I \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} () \right) - \sum_{n \leq N} \int_I u_n$ qui tend vers 0 si N tend vers l'infini, (*voir exercices*)

Un autre problème souvent posé est la **recherche d'équivalents**, de la somme d'une série ou de la limite d'une suite lorsque la variable tend vers des bornes du domaine de convergence.

Ne pas oublier qu'on les obtiendra souvent par des intégralités, pouvant elles-mêmes provenir de développements limités, ou d'encadrements de sommes du type

$S_N = \sum_{n=0}^{N} f(n)$ par des intégrales, lorsque f est monotone, (pas seulement décroissante).

Un mot des fonctions définies par des intégrales, lorsqu'il s'agit d'intégrales impropres sur un intervalle I. Une technique consiste à introduire des segments $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont les bornes inférieures et supérieures ont pour limites celles de I, d'étudier les fonctions f_n obtenues en intégrant sur I_n, par les Théorèmes de cours , et à justifier le bon type de convergence (uniforme le plus souvent) pour conclure.

Applied Mathematics

En d'autres termes, la technique la plus simple consiste, après avoir justifié la convergence de l'intégrale en cause, à introduire les fonctions :

$F_n(x) = \int_a^n f(x,t)\,dt$, puis à appliquer les Théorèmes ci-dessous pour conclure à une éventuelle continuité ou dérivabilité des F_n et voir enfin si la convergence des F_n vers

F est uniforme, ainsi, en cas de dérivation, que celle des $F_n'(x)$ vers leur limite, pour appliquer les deux derniers Théorèmes cités ci-dessous .

Théorème 1 __ *soit* f *intégrable de* $[a , b]$ *dans* E *espace de Banach. La fonction* $F : x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$ *est continue sur* $[a , b]$.

Théorème 2 __ *Si* f *est continue de* $[a , b]$ *dans* E, *Banach la fonction* $F : x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$ *est dérivable sur* $[a , b]$ *de dérivée* $F' = f$

Théorème 3 __ *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$, $f : I \times [a , b] \longmapsto \mathbb{R}$ *une fonction continue, la fonction* $x \longmapsto F(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$ *est continue sur l'intervalle* I .

Théorème 4 __ *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \times [a , b] \longmapsto \mathbb{R}$ *une fonction continue telle que pour tout* t *de* $[a , b]$ *et tout* x *de* I , $\frac{\partial f}{\partial x}(x , t)$ *existe , et que* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *soit continue sur* $I \times [a , b]$.

Alors la fonction $x \longmapsto F(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$ *est dérivable et* $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x , t)\,dt$.

Théorème 5 ___ *Soit une suite de fonctions continues,* U_n *de E topologique dans F métrique qui converge uniformément vers U, la fonction U est continue.*

Théorème 6 ___ (le dernier !) *Soit une suite* $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de fonctions du segment* $[a, b]$ *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *On suppose les* U_n *dérivables, les* U_n' *étant intégrables au sens de Riemann sur* $[a , b]$. *Si les* U_n' *convergent uniformément sur* $[a , b]$ *vers les fonctions V, et si les* U_n

convergent pour une valeur x_0 de la variable , alors les U_n convergent uniformément vers une fonction U dérivable , telle que $u(x_0) = \lim_{n \to +\infty} U_n(x_0)$ *et* $U = V$.

En ce qui concerne la convergence uniforme, elle est souvent obtenue par une convergence dominée de l'intégrale, mais si elle est non absolument convergente, il ne peut pas être question de convergence dominée. Pensez alors aux découpages de l'intégrale associés aux changements de signe de la fonction intégrée, et à la majoration du reste d'une série alternée ! (*Voir exercice où j'ai employé les deux méthodes).*

Les problèmes portant sur les intégrales impropres et les interversions de séries reposent souvent sur l'identité

$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \ldots + u^n + \frac{u^{n+1}}{1-u}$, si $u \neq 0$ ou sur la connaissance d'un majorant du reste dans les séries qui convergent selon leur critère.

Cette identité sert dans bien des situations, pensez-y ! !

La **transformation d'Abel** permet d'obtenir des convergences uniformes lorsque les sommes $S_{p,\,q}$, sont majorées uniformément par rapport au paramètre.
En fait, pour l'étude des fonctions définies par des intégrales impropres, la méthode actuelle est de s'appuyer sur les **Théorèmes de convergence dominée**, lorsqu'ils s'appliquent : on y gagne en efficacité.

Avec le **Théorème de convergence monotone**, ils constituent les outils efficaces pour l'étude des intégrales impropres absolument convergentes. Le recours aux intervalles

I_n, « segments croissants » de réunion l'intervalle I d'intégration ne se justifie plus que pour les intégrales semi-convergentes.

Mais il faut garder du bon sens : si la fonction définie par une intégrale se calcule facilement, il est inutile de recourir aux Théorèmes généraux !

Fonctions sommables

Définition : *Soit f une fonction définie dans $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On dit que f est sommable (ou intégrable au sens de Lebesgue) si on a* $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,dx < +\infty$.

L'espace des fonctions sommables est noté $\boldsymbol{L}^1(\mathbb{R}^n)$

Dans la pratique, pour montrer qu'une fonction est sommable, il suffit de montrer qu'elle est majorée en module par une fonction positive d'intégrale finie.

Le théorème suivant est d'une importance capitale. La supériorité de **l'intégrale de Lebesgue** sur **l'intégrale de Riemann** est due en partie au fait que l'on peut intégrer plus de fonctions, mais elle est surtout due au fait que l'on dispose de théorèmes beaucoup plus efficaces. On comparera l'énoncé suivant, et le théorème de dérivation sous le signe somme qui en découle, aux résultats analogues fondés sur la convergence uniforme.

Théorème (de Lebesgue ou de la convergence dominée)

Soit f_j une suite de fonctions qui converge presque partout vers une fonction f. On suppose qu'il existe une fonction positive sommable fixe h telle que l'on ait $|f_j(x)| \leq h(x)$ p.p. pour tout j.

On a alors

$$\begin{cases} \int_* \; | f(x) - f_j(x) | dx \longrightarrow 0 \\ \text{et} \\ \int_* \; f_j(x)dx \longrightarrow \int_* \; f(x)dx \end{cases}$$

Les objets mathématiques sont des représentations de concepts, des résultats d'opérations définies avec rigueur. Mais on peut s'interroger sur leur « nature »

Théorème (de dérivation sous le signe somme)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. On se donne une fonction f définie sur $A \times I$ vérifiant les trois hypothèses suivantes.

(a) *Pour $\lambda \in I$, la fonction $x \longmapsto f(x, \lambda)$ est sommable sur A*

(b) *La dérivée partielle $\frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial \lambda}$ existe en tout point de $A \times I$*

(c) *Il existe une fonction h positive et sommable sur A telle que l'on ait $\left| \frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial \lambda} \right| \leq h(x)$ quels que soient x et λ.*

Alors la fonction F définie par

$$F(\lambda) = \int_A \; f(x, \lambda)dx \qquad (1)$$

est dérivable dans I, et on a

$$F'(\lambda) = \int_A \; \frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial \lambda} dx \qquad (2)$$

Mode d'emploi

Ce résultat ne prend toute sa force que si on l'accompagne des deux remarques suivantes.

1_ Avant d'appliquer le théorème, on peut retirer du domaine d'intégration un ensemble de mesure nulle, ce qui ne change pas les intégrales (1) et (2), et donc ne vérifier les hypothèses que dans l'ensemble A' ainsi obtenu.

En revanche, il ne suffirait pas que, pour chaque λ, les hypothèses soient satisfaites sauf sur un sous-ensemble de A _ fût-il réduit à un point _ qui dépend de λ.

2_ La dérivabilité est une propriété locale. Pour prouver que F est dérivable dans tout intervalle compact $[c, d] \subset I$. Il suffira donc de trouver des fonctions positives sommables h_{cd} qui majorent $\dfrac{\partial f}{\partial \lambda}$ en module lorsque λ parcourt $[c, d]$.

Théorème (de continuité sous le signe somme)

f est une fonction sur A × I, à valeurs dans $\mathbb{R}$*. On suppose que la fonction* $\lambda \longmapsto f_\lambda(x) = f(x, \lambda)$ *est mesurable pour chaque* $\lambda \in I$ *et l'on s'intéresse aux propriétés de la fonction :*

$\lambda \longmapsto \int_A f(x, \lambda)\, d\mu(x)$ *, où* μ *est une mesure positive.*

Supposons que

$$\begin{cases} (a) & \lim_{\lambda \to \lambda_0} f(x, \lambda) = \zeta(x), \ \forall\, x \in A, \ \lambda_0 \in I \\ (b) & |f(x, \lambda)| \le h(x), \ h \ \mu\text{-}\textit{intégrable}, \ \forall\, \lambda \in I \end{cases}$$

Alors

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \int_A f(x, \lambda)\, d\mu(x) = \int_A \zeta(x)\, d\mu(x).$$

Conséquence.

Si la fonction $\lambda \longmapsto f(x,\ \lambda)$ *est continue sur A,* $\forall\ \lambda \in I$ *et s'il existe une fonction h* μ-*intégrable sur A telle que* $\left|f(x,\ \lambda)\right| \leq h(x)$ *alors la fonction*

$$F : \lambda \longmapsto F(\lambda) = \int_A f(x,\ \lambda)d\mu(x) \text{ est continue sur A.}$$

Attention à l'impérialisme des concours

La question est de savoir ce qu'on emporte. J'aurais aimé, en intégrant ma Grande École, emporter de moins en moins lourd. Emporter du plus léger, et du plus subtil. Vivre, c'est être parti et être tellement allégé qu'on en devient tout nu. Plus on grandit, plus on se dénude. C'est beaucoup plus facile pour voyager. On n'a pas besoin de valise. Du coup, la liberté prend un sens aérien, prend un sens assez gai, assez joyeux. Au fond, le maître mot serait la joie. Moins le plaisir que la joie. La joie de penser, la joie de vivre, la joie d'avoir un corps, la joie de rencontrer les autres. La joie. Au fond, l'apprentissage dans les Classes Préparatoires devrait être ça : la découverte de la splendeur de la joie.

Je ne conseillerai à personne de priver un adolescent de cette aventure, de la traversée du fleuve, de cette richesse, de ce trésor que je n'ai jamais pu épuiser, puisqu'il contient le virtuel de l'apprentissage, l'univers de l'abstraction et le scintillement solaire de l'attention. Lesdits *taupins*, vivent dans un monde dont la plupart des autres n'explorent que la moitié. Ils connaissent limite et manque.



Suites et *séries* numériques pour les licences 2[e] année

Comment vous donner une idée amusante des séries ? En pensant peut-être aux pyramides, ou aux cairns en montagne, c'est-à-dire à une œuvre obtenue en rajoutant sans arrêt un petit quelque chose, un caillou. Ou bien une stalagmite à laquelle chaque goutte qui tombe apporte quelques grains de calcite… ou à un objet en laque, obtenu par couches successives.

La formulation mathématique de ces ajouts va donc faire intervenir une addition, et un passage à la limite : le cadre tout trouvé des séries sera donc celui des espaces vectoriels normés.

Qu'appelle-on espace vectoriel ? Un espace vectoriel est un ensemble d'objet ou d'éléments qui peuvent être additionnés entre eux et multipliés par des nombres (le résultat étant encore un élément de l'ensemble), de telle sorte que les formules usuelles de calcul soient encore valables.

Idées générales

Le corps $\mathbb{R}$ étant le seul corps ordonné valué complet, la relation d'ordre joue un rôle très important dans l'étude des suites et des séries de terme général u_n réel.

C'est pourquoi, pour les suites, une bonne démarche consisterait à examiner une éventuelle monotonie, que la suite soit du type « $u_n = f(n)$ », ou $u_{n+1} = f(u_n)$ », ou définie par une intégrale, (ne pas oublier l'aspect forme linéaire positive de l'intégrale agissant sur les fonctions de variable réelle, à valeurs réelles).

L'étude des suites en « $u_{n+1} = f(u_n)$ » peut se faire par récurrence, ou par étude des variations de la fonction $x \longmapsto x - f(x)$.

Ne pas oublier quand même le **Théorème du point fixe**, ni l'éventualité de points répulsifs.

La **formule de la moyenne**, cela existe, **Taylor Lagrange** ou **Young** aussi,

Ne pas oublier le recours à la série de terme général $w_n = u_{n+1} - u_n$.

Quand aux séries numériques, ou de terme général dans un Banach E, on commence par une étude de la convergence absolue éventuelle, (E, *e.v.n.* non complet, cette démarche est à proscrire car la convergence absolue n'implique pas la convergence).

Avant d'appliquer un critère précis, (d'Alembert …), commencer par évaluer l'ordre de grandeur de $\left|u_n\right|$ en le remplaçant par un équivalent.

Ne pas oublier le côté « condition suffisante » des critères de convergence, et n'allez jamais dire « puisque la série converge on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ … », même si vous en avez fortement envie.

Pour la *semi-convergence*, bien sûr il y a les séries alternées, 'soyez précis avec le critère), mais n'oubliez pas qu'avec $u_n = v_n$, en écrivant $u_n = v_n + (u_n - v_n)$ on peut parfois conclure très facilement ; mais ne pas se contenter d'un illicite $u_n \approx v_n$ lorsqu'il ne s'agit pas de séries à termes de signe constant. Cette technique, (ajouter et retrancher l'équivalent) s'emploie aussi pour les séries quelconques.

Quand u_n est du type $f(n)$ avec f positive décroissante, ou même f de signe quelconque, penser au lien avec les intégrales impropres.

Des outils importants :
- la sommation par paquets
- la **transformation d'Abel**
- les développements limités

En ce qui concerne la recherche d'équivalents du terme général u_n d'une suite qui tend vers 0, pensez à chercher α tel que $\lim_{n \to +\infty} u^{\alpha}_{n+1} - u^{\alpha}_{n} = \ell \neq 0.$

Par Césaro on aura $\dfrac{u^{\alpha}_{n} - u^{\alpha}_{0}}{n}$ tend vers ℓ d'où $u^{\alpha}_{n} \approx n\ell$ donc $u_n \approx (n\ell)^{1/\alpha}$

Ceci s'applique, pour v_n qui tend vers ℓ, à $u_n = v_n - \ell$, ou si v_n tend vers l'infini, à $u_n = \dfrac{1}{v_n}$.

Si u_n est la somme partielle d'une série divergente, (ou le reste d'une série convergente) de terme général positif a_n, se rappeler qu'avec $b_n = a_n$, on obtient $v_n \approx u_n$, avec v_n somme partielle, (ou reste d'ordre n) de la série des b_n.

Dans ce type de démarche, b_n devient souvent du genre $f(n)$ et les encadrements par les intégrales servent beaucoup.

Quelques idées en vrac.

Pour étudier des suites doubles, on peut leur associer la suite des sup $(u_n,\ n \geq p)$ et des inf $((u_n,\ n \geq p)$.

Ne pas oublier aussi le Théorème d'inversion des limites, d'emploi facilité sur $\mathbb{R}$, par l'utilisation de la relation d'ordre et de la monotonie des suites.

Penser aux liens ente suite et série, aux suites extraites, surtout dans des suites monotones.

Parfois, un calcul direct avec les formules liées aux suites arithmétiques ou géométriques conviendrait très bien.

Stirling, $\left(n\,! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\right)$, une valeur sûre qui peut encore servir.

Quand on évalue une somme s_n de termes $u(n, k)$, k variant, et que l'on cherche la limite des s_n : on a de « plus en plus de termes, chaque terme étant fonction de fonction de n ; on peut être tenté de se ramener à une somme finie, si on peut majorer uniformément la somme des autres.

Quand on somme d'une façon, voir si on ne peut pas sommer autrement (un exercice en T.D.) nous servira d'exemple : c'est du **Fubini** en somme.

Dans la recherche d'un équivalent du terme général u_n *d'une suite monotone* qui converge vers 0, ou d'un équivalent de $u_n - \ell$ si elle converge vers ℓ ou de $\frac{1}{u_n}$ si elle diverge), l'utilisation d'un équivalent du terme général $x_n = u_{n+1} - u_n$ de la série associée peut servir. On suppose donc x_n équivalent à y_n.

Primo _ Si la série des x_n *converge,* la suite des u_n converge.

Supposons d'abord qu'elle converge vers. Alors le reste de la série des x_n, qui vaut :

$$R_{n-1} = \sum_{p=n}^{+\infty} (u_{p+1} - u_p) = -u_n$$

est équivalent au reste

$$S_{n-1} = \sum_{p=n}^{+\infty} y_p$$

Si la suite des u_n converge vers $\ell \neq 0$, en posant $v_n = u_n - \ell$, on a :

$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n$, donc $R_n = -v_n$, et cette technique donne un équivalent de $u_n - \ell$.

Secundo _ Si la série des x_n *diverge,* dans ce cas la suite des u_n diverge, vers $+\infty$ si elle est croissante, $-\infty$ si elle est décroissante, mais dans ce cas les sommes

partielles des séries des x_n et des y_n sont des infiniments grands équivalents, d'où :

$$X_{n-1} = \sum_{p=0}^{n-1} x_p = \sum_{p=0}^{n-1} u_{p+1} - u_p = u_n - u_0,$$

équivalent à

$$Y_{n-1} = \sum_{p=0}^{n-1} y_p$$

Bien sûr ceci n'a d'intérêt que si le calcul d'un équivalent pour le reste (ou la somme partielle), de la série des y_p est facile, ce qui est le cas par exemple des termes en $y_n = f(n)$ avec f positive , décroissante, d'où une comparaison avec des intégrales.

Dans ce raisonnement on a utilisé le résultat, qui doit être connu, sur les **équivalents dans les séries** : pour une série à termes de signe constant, u_n, si $u_n \sim v_n$, les séries sont de même nature et :

en cas *de convergence*, les restes d'ordre n sont des infiniments petits équivalents.

en cas de divergence, les sommes partielles d'ordre n sont des infiniments grands équivalents.

Pour ce qui concerne la *nature d'une série* pas d'équivalent pour les séries de terme général u_n de signe quelconque, mais … si $u_n \sim a_n$, avec a_n terme général d'une série plus facile à étudier, penser à écrire :

$u_n = a_n + (u_n - a_n)$, et à étudier les deux séries de termes généraux a_n et $b_n = u_n - a_n$, pour éventuellement conclure.

∆ !! _ Pour qu'« un peu de science » soit connu de tous, il est sans doute impératif de *ré-érotiser* l'acte de connaître. Mais comment faire ?

D'abord, en retrouvant le désir de penser les savoirs et d'exprimer leurs saveurs essentielles.

Ensuite, en jouant des concepts. Eux seuls nous forcent à tenir les banalités à distance. Ils abattent les cloisons de nos intellects, hissent ces derniers au-dessus des certitudes établies, les obligent à des orgies de déconstruction, leur permettant ainsi de saisir ce que la science aventurière propose de radicalement neuf. C'est ce que je vais tenter de faire dans ce nouveau carrefour.

Clefs de lecture I

Jusqu'ici, j'ai essayé de vous familiariser avec les différents concepts tels qu'ils sont enseignés en Amphithéâtre. Certes, nous sommes souvent sortis de la salle de classe, mais c'était toujours dans le but de suivre les « destinées » de ces objets dans le vaste monde de l'analyse, avant de retourner aussitôt dans notre salle de Travaux Dirigés, plus dégourdis et plus conscients, avec un capital de réflexions nouvelles. Nous les

avons en quelque sorte, observées de haut, au grand angle. Il est sans doute temps de tenter un autre type d'expérience et d'essayer de les explorer de l'intérieur, en immersion.

Il s'agit de comprendre ce que ces concepts sont mais également ce qu'ils pourraient _ et devraient _ être.

Ne serait-ce que l'espace d'un instant, laissons-nous transporter au cœur de formulations séquentielles, et des intégrales « sentons-les » comme les sentent justement ceux qui les vivent parfois de l'intérieur, avec notre imagination et nos sentiments. Chacun des exercices que nous allons aborder, lance des feux particuliers.

Exercice I

Soit une suite de nombres réels $b_n > 0$.

α) _ Existence,
$$\begin{cases} \text{Pour } n \geq 2 \\ \ldots.. \\ \text{de } a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(1 + k\frac{b_n}{n}\right)^n} \end{cases}$$

β) _ Montrer que $a_n \geq \dfrac{1}{exp(b_n) - 1}$ et que $a_n b_n \leq 2$.

γ) _ On suppose la suite des b_n convergente vers $b > 0$. Montrer que la suite des a_n a une limite > 0.

Ma solution

α) _ Si pose $u_{k,n} = \dfrac{1}{\left(1 + k\dfrac{b_n}{n}\right)^n}$, pour n fixé, si k tend vers $+\infty$, $u_{k,n}$ est équivalent à $\left(\dfrac{n}{b_n}\right)^n \times \dfrac{1}{k^n}$: avec $n \geq 2$ on a le terme général d'une série convergente, donc

$$a_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(1 + k\dfrac{b_n}{n}\right)^n} \text{ existe.}$$

β) _ On a $\left(1 + k\dfrac{b_n}{n}\right)^n = exp\left[n \operatorname{Log}\left(1 + k\dfrac{b_n}{n}\right)\right]$, et en utilisant l'inégalité $\operatorname{Log}(1 + x) \leq x$, valable pour $x > -1$,

on a :

$$\left(1 + k\frac{b_n}{n}\right)^n \leq \exp\left(n\, k\frac{b_n}{n}\right) = exp\,(k\, b_n),$$

d'où

$$u_{k,n} \geq \left[\frac{1}{exp\,(b_n)}\right]^k,$$

et, en sommant pour $k \geq 1$,

$$a_n = \sum_{k=1}^{+\infty} u_{k,n} \geq \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{exp\,(b_n)}\right]^k = \frac{1}{exp\,(b_n)} \times \frac{1}{1 - exp\,(-b_n)}$$

soit

$$a_n \geq \frac{1}{exp(b_n) - 1}\,.$$

L'inégalité $\mathrm{Log}(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$, (valable pour $x \geq 0$), ne conduit pas $a_n\, b_n \leq 2$,

(sauf erreur de ma part), mais, pour n fixé $k \longmapsto u_{k,n} = f(k) = \dfrac{1}{\left(1 + k\dfrac{b_n}{n}\right)^n}$ est

une fonction positive décroissante de k, et l'inégalité : $f(k) \leq f(x)$, pour

$x \in [k-1,\ k]$, conduit, en intégrant, à : $u_{k,n} = f(k) \leq \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{dx}{\left(1 + x\dfrac{b_n}{n}\right)^n}$, et en

sommant, à : $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} u_{k,n} \leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(1 + x\dfrac{b_n}{n}\right)^n}$,

soit, comme on a supposé $n \geq 2$:

$a_n \leq \dfrac{n}{b_n} \times \dfrac{1}{n-1} \times \left[-\dfrac{1}{\left(1 + \dfrac{b_n}{n}x\right)^{n-1}}\right]_0^{+\infty}$ ou encore : $a_n \leq \dfrac{n}{b_n} \times \dfrac{1}{n-1}$ avec

$\dfrac{n}{n-1} = \dfrac{n-1+1}{n-1} = 1 + \dfrac{1}{n-1} \leq 2$, on a bien $a_n\, b_n \leq 2$, pour tout $n \geq 2$.

γ) _ Comme $a_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(1 + k\frac{b_n}{n}\right)^n} = \lim_{p \to +\infty} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\left(1 + k\frac{b_n}{n}\right)^n}$, et que l'on cherche $\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} \left[\lim_{p \to +\infty} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\left(1 + k\frac{b_n}{n}\right)^n} \right]$, on se retrouve à la tête d'un problème d'interversion de limite.

Posons $f(p, n) = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\left(1 + k\frac{b_n}{n}\right)^n}$.

Pour p fixé, si n tend vers $+\infty$, $\left(1 + k\frac{b_n}{n}\right)^n = exp\left[n \text{ Log}\left(1 + k\frac{b_n}{n}\right)\right]$, avec les b_n bornés, tend vers e^{kb} car l'exposant est équivalent à $n \times k\frac{b}{n} = kb$, puisque les b_n tendent vers $b > 0$; donc $\lim_{n \to +\infty} f(p, n) = \varphi(p) = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{e^{kb}} = \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{1}{e^b}\right)^k$.

Pour n fixé, $\lim_{p \to +\infty} f(p, n) = \psi(n) = a_n$, et cette convergence est uniforme en n.

Pour le justifier, nous allons utiliser un critère de la convergence dominée, (en n), de la série des $u_{k,n} = \frac{1}{\left(1 + k\frac{b_n}{n}\right)^n}$.

D'abord, $\lim_{n \to +\infty} b_n = b > 0$, et les b_n sont tous $\neq 0$, donc la suite des b_n est minorée par un $\beta > 0$; traduire la limite avec $\varepsilon = \frac{b}{2}$, d'où n_0 tel que :

$n \geq n_0 \Rightarrow b_n \geq b - \frac{b}{2} = \frac{b}{2}$, puis prendre $\beta = \inf\left(b_2, b_3, \ldots, b_{n_0}, \frac{b}{2}\right)$.

On a donc $0 \leq u_{k,n} \leq \dfrac{1}{\left(1 + \frac{k\beta}{n}\right)^n}$.

Puis, $x \longmapsto g(x) = \left(1 + \frac{k\beta}{x}\right)^{-x}$ est monotone,

car

$$g(x) = exp\left[- x \ \mathrm{Log}\left(1 + \frac{k\beta}{x}\right)\right],$$

donc

$$g'(x) = \left[- \mathrm{Log}\left(1 + \frac{k\beta}{x}\right) - \frac{x\left(\frac{-k\beta}{x^2}\right)}{1 + \frac{k\beta}{x}}\right] g(x)$$

est du signe de $h(x) = \dfrac{k\beta}{x + k\beta} - \mathrm{Log}\left(1 + \frac{k\beta}{x}\right)$.

On a

$$h'(x) = -\frac{k\beta}{(x+k\beta)^2} - \frac{-\frac{k\beta}{x^2}}{1+\frac{k\beta}{x}} = \frac{k\beta}{x(x+k\beta)} - \frac{k\beta}{(x+k\beta)^2} = \frac{(k\beta)^2}{x(x+k\beta)^2},$$

h' fonction positive pour $x > 0$, donc h est croissante, or $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$, donc h est négative et g' aussi sur $]0, +\infty[$.

Mais alors g est décroissante, et $u_{k,n}$ est majoré par g(2) pour $n \geq 2$, soit $0 \leq u_{k,n} \leq \dfrac{1}{\left(1+\frac{k\beta}{2}\right)^2}$ équivalent (lorsque $k \longrightarrow +\infty$) à $\dfrac{4}{\beta^2 k^2}$: on a bien convergence normale, (en n), de la série des $(u_{k,n})_{k \geq 1}$, et le Théorème d'interversion des limites s'applique, (on est à valeurs dans $\mathbb{R}$ complet) :

donc $\lim\limits_{p \to +\infty} \varphi(p)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$ existent en étant égales,

d'où

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{e^b}\right)^k = \frac{1}{e^b} \times \frac{1}{1-\frac{1}{e^b}}$$

soit encore

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \frac{1}{e^b - 1},$$ valeur strictement positive.

La conviction dans le domaine de l'enseignement est la transmission d'une technique de raisonnement. Pour convaincre que la théorie des suites et séries fonctionne, il me faut en dire les limites.

Exercice 2 Culturel !!

Soit la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$. Étude de la convergence. Soit $f(x)$ sa somme.

Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$.

Cet exercice est en quelque sorte, un dialogue entre d'**Alembert**, **Wallis**, **Laplace, Fubini** et bien d'autres. Le point sensible dans ma résolution est là : rythme, poésie, mélodie, la capacité de dire l'ouïe et pas seulement d'écouter d'entendre c'est là qu'est le risque pris la nouveauté produite …

Pour $x \neq 0$, avec $u_n(x) = \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$ on a, par d'Alembert $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{x^2}{4}\frac{1}{(n+1)^2}$ qui tend vers 0, donc la série converge pour tout x réel.

Un peu de culture : $I_{2n} = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{2n} dt = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \ldots \times 2n}\frac{\pi}{2}$ soit

$I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}$, (intégrale de Wallis), donc, partant de $e^{ix\sin t} = \sum_{n \geq 0} \frac{(ix \sin t)^n}{n!}$ qui converge normalement en t, (x fixé) on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\sin t} dt = \sum_{n\geq 0} \frac{(ix)^n}{n!}\int_{-\pi}^{\pi} (\sin t)^n dt$$

Les intégrales pour n impair sont nulles, (fonction impaire sur $[-\pi\,;\,\pi]$), il reste, (parité et symétrie par rapport à $\frac{\pi}{2}$ du sinus),

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\sin t}\,dt = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)\,!} \times \left(4 \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n dt\right)$$

$$= \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)\,!} \times 4\, \frac{(2n)\,!}{2^{2n}(n\,!)^2}\, \frac{\pi}{2} = 2\,\pi\, f(x)$$

D'où $f(x) = \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\sin t}\,dt$. Mais alors $|f(x)| \leq 1$ et l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$ converge pour $s > 0$. C'est la *transformée de Laplace de f :*

Je la note $L(f)(s)$.

Soit $y > 0$. On a $\int_0^y e^{-st} f(t)dt = \int_0^y e^{-st}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it\sin u}}{2\pi}\,du\right)dt$

$$= \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^y e^{-st} e^{it\sin u} dt\right)du \text{ (par } \textit{Fubini}\text{), et}$$

$$Lf(s) = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y,u)du \quad \text{avec} \quad g(y,u) = \int_0^y e^{-st} e^{it\sin u} dt.$$

Comme $\left|e^{-st} e^{it\sin u}\right| \leq e^{-st}$ et que $\int_0^{+\infty} e^{-st}dt$, $\lim_{y\to+\infty} g(y,u)$ existe, uniformément en $u \in [-\pi, \pi]$ car

$$\left|\int_0^{+\infty} e^{-st} e^{it\sin u}\, dt - \int_0^{y} e^{-st} e^{it\sin u}\, dt\right| \leq \int_y^{+\infty} e^{-st}\, dt = \frac{e^{-sy}}{s} \text{ majorant qui}$$

tend vers 0 si y tend vers $+\infty$.

On a donc $\mathrm{L}f(s) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^{+\infty} e^{-st + it\sin u}\,dt\right)du$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{e^{t(-s+i\sin u)}}{-s+i\sin u}\right]_0^{+\infty} du$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{du}{s - i\sin u} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{(s + i\sin u)}{s^2 + \sin^2 u}du$$

La partie imaginaire de l'intégrale est nulle, (fonction impaire en u) donc

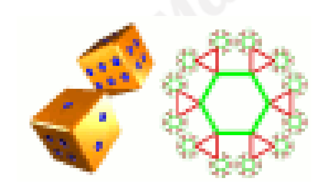
$$\mathrm{L}f(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{s}{s^2+\sin^2 u}du = \frac{s}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{du}{s^2+\sin^2 u} = \frac{2s}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{du}{s^2+\sin^2 u}.$$

Avec $t = \operatorname{tg} u, \Rightarrow dt = (1+t^2)$ il vient :

$$\mathrm{L}f(s) = \frac{2s}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{(1+t^2)}{(1+t^2)(1+t^2)(s^2+t^2)}dt = \frac{2s}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^2(s^2+1)+s^2}$$

$$= \frac{2s}{\pi(s^2+1)}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^2 + \dfrac{s^2}{s^2+1}} = \frac{2}{\pi\sqrt{s^2+1}}\left[\operatorname{Arctg}\frac{t\sqrt{s^2+1}}{s}\right]_0^{+\infty}$$

et finalement, $\mathrm{L}f(s) = \dfrac{1}{\sqrt{1+s^2}}$ pour $s > 0$.



Clefs de lecture II

Les plus grands esprits ne se consacreraient pas totalement à la physique, à la biologie, à l'histoire, à la philosophie, aux Mathématiques s'ils n'étaient pas aussi largement payés de retour. C'est rassurant, à notre modeste niveau, de parvenir à tirer de grandes satisfactions de l'objet de notre étude, bien que plongés dans la grisaille quotidienne de la routine. Le moment de bonheur qui nous récompense « de la ronde des heures trop semblables » finit toujours par arriver.

Exercice III

On pose $u_n = \dfrac{1}{3n+1} + \dfrac{1}{3n+4} + \dots + \dfrac{1}{6n-2}$. Étudier la limite λ de cette suite et trouver un équivalent de $u_n - \lambda$.

Ma solution

En écrivant :

$$u_n = \frac{1}{3n} \times \left[\frac{1}{1+\frac{1}{3n}} + \frac{1}{1+\frac{4}{3n}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{3n-2}{3n}} \right] = \frac{1}{3n} \times \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+\frac{k+\frac{1}{3}}{n}},$$

on reconnaît une expression qui conduit à la formule de la moyenne dans les intégrales.

En posant $f(t) = \dfrac{1}{1+t}$, f fonction définie continue, de classe C^∞ en fait, sur $[0, 1]$,

on a : $u_n = \dfrac{1}{3} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{k+\frac{1}{3}}{n}\right)$:

c'est une somme de Riemann, de limite $\lambda = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{dt}{1+t} = \dfrac{\text{Log } 2}{3}$.

Pour la recherche de l'équivalent, on doit comparer une intégrale et une somme : on coupe l'intégrale en somme pour obtenir :

$$v_n = \lambda - u_n = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)dt - \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k+\frac{1}{3}}{n}\right),$$

et comme

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+\frac{1}{3}}{n}\right) = \int_{k/n}^{k+1/n} f\left(\frac{k+\frac{1}{3}}{n}\right) dt,$$

il vient :

$$v_n = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left[f(t) - f\left(\frac{k+\frac{1}{3}}{n}\right)\right] dt,$$

et le reste repose sur la formule de Taylor Lagrange à un ordre convenable.

Pour t entre $\frac{k}{n}$ et $\frac{k+1}{n}$, il existe c_k entre t et $\frac{k+\frac{1}{3}}{n}$ tel que :

$$f(t) - f\left(\frac{k+\frac{1}{3}}{n}\right) = \left(t - \frac{k+\frac{1}{3}}{n}\right) f'\left(\frac{k+\frac{1}{3}}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(t - \frac{k+\frac{1}{3}}{n}\right)^2 f''(c_k),$$

avec c_k fonction de t et de k bien sûr, mais avec $\left|f''(c_k)\right| \leq ||f''||_\infty$, norme prise

sur $[0, 1]$, segment sur lequel f'', continue, est bornée.

On a donc :

$$v_n = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k+\frac{1}{3}}{n}\right) \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(t - \frac{k+\frac{1}{3}}{n}\right) dt \; +$$

$$+ \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(t - \frac{k+\frac{1}{3}}{n}\right)^2 f''(c_k) dt$$

La première somme vaut:

$$s_n = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2}\left[\left(t - \frac{k+\frac{1}{3}}{n}\right)^2\right]_{k/n}^{(k+1)/n} f'\left(\frac{k+\frac{1}{3}}{n}\right) = \frac{1}{18n^2} \sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k+\frac{1}{3}}{n}\right),$$

donc

$$n\, s_n = \frac{1}{18} \times \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k + \frac{1}{3}}{n}\right),$$

expression ayant pour limite $\frac{1}{18}\int_0^1 f'(t)dt = \frac{1}{18}\,[f(1) - f(0)] = -\frac{1}{36}$, somme de Riemann pour f').

La deuxième somme se majore :

$$|t_n| \le \frac{1}{6}\,\|f''\|_\infty \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(t - \frac{k + \frac{1}{3}}{n}\right)^2 dt$$

$$\le \frac{1}{18}\,\|f''\|_\infty \sum_{k=0}^{n-1} \left[\left(t - \frac{k + \frac{1}{3}}{n}\right)^3\right]_{k/n}^{(k+1)/n}$$

$$\le \frac{1}{18}\,\|f''\|_\infty \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3n^3} \le \frac{||f''||_\infty}{54n^2}.$$

On a donc $v_n = s_n + t_n$, avec $\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} n\, s_n = -\frac{1}{36} \\ \text{et} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} n\, t_n = 0 \end{cases}$ car $|n\, t_n| \le \frac{||f''||_\infty}{54n}$:

l'équivalent cherché est donc $-\frac{1}{36n}$.

Clefs de lecture III

Comme on l'a déjà constaté, les manuels offrent avant tout cette « ronde » monotone. Il est rare qu'ils rendent quelque lueur des feux promis.
Ils enseignent les différents concepts, mais ils n'apprennent pas vraiment à les *sentir.*

Par ailleurs, comme **Italo Calvino** l'a justement remarqué, le savant qui n'hésite pas à dire « que ma découverte est belle ! » est tout simplement pathétique.

Les belles choses doivent pouvoir parler d'elles-mêmes, sans fanfares ni sous-titrage.

Seuls certains professeurs inoubliables réussissent à transmettre une authentique vibration pendant leurs cours, parce qu'ils l'éprouvent encore. Il n'est pas facile de le faire … j'essaierai quand même et peu importe si, pour atteindre ce but, il nous faut aller au-delà des programmes de vos partiels. Le vertige, l'*hubris*, pour une matière ne se communique que si l'on parvient aux cimes. Attaquons-nous à cet exercice singulier, mais intéressant.

Exercice IV

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telle que les intégrales $\int_0^{+\infty} x^2 f^2(x)\,dx$ et $\int_0^{+\infty} f'^2(x)dx$ convergent.
Montrer que $\int_0^{+\infty} [f(x)]^2 dx$ converge et que

$$\left(\int_0^{+\infty} f^2\right)^2 \leq 4 \int_0^{+\infty} x^2 f^2(x)dx \int_0^{+\infty} f'^2(x)dx.$$

Quand a-t-on égalité ?

Avant d'essayer de transmettre une théorie, car c'est cela convaincre, je dois l'avoir comprise. L'ennui de la pédagogie est de prétendre transmettre des choses que l'on n'a pas vraiment comprises. Si j'ai tout compris de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, de l'intégrale de Riemann, je peux en comprendre la totalité car c'est une théorie inventée par les hommes comportant ses limites.

Ma solution

Pour $0 \leq x \leq y$ on a

$$\left[\int_x^y tf(t)f'(t)dt\right]^2 \leq \left(\int_x^y t^2 f^2(t)dt\right)\left(\int_x^y f'^2(t)dt\right)$$

par Cauchy Schwarz, donc, comme les intégrales des fonctions $t \longmapsto t^2 f^2(t)$ et $t \longrightarrow f'^2(t)$ convergent, on peut rendre le majorant arbitrairement petit pour $y \geq x$ assez grand, d'où la convergence de $\int_0^{+\infty} tf(t)\, f'(t)\, dt$, (par critère de Cauchy).

Or $\int_0^x tf(t)f'(t)dt = \frac{1}{2}\, x f^2(x) - \frac{1}{2} \int_0^x f^2(t)dt$, (on intègre par parties avec $u = t$ et $dv = f(t)f'(t)dt$.)

On a alors :

$$xf^2(x) = \int_0^x f^2(t)dt + 2\int_0^x tf(t)f'(t)dt,$$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} xf^2(x)$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, (car $x \longmapsto \int_0^x f^2(t)dt$ est croissante donc tend vers ℓ_1 ou $+\infty$, alors que la 2 ^{ième} intégrale converge).

Mais $\lim\limits_{x \to +\infty} xf^2(x) = \ell$ avec $\ell = +\infty$ ou $\ell > 0$ implique avec $\ell' \in]0, \ell[$, l'existence de x_0 tel que $x \geq x_0 \Rightarrow xf^2(x) \geq \ell'$ d'où $x^2 f^2(x) \geq \ell' x$ or $\int_*^{+\infty} x^2 f^2(x)dx$ converge : c'est absurde.

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} xf^2(x) = 0$, mais alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x f^2(t)dt = -2\int_0^{+\infty} tf(t)f'(t)dt$;

on a bien convergence de $\int_0^{+\infty} f^2$.

Puis l'inégalité de Cauchy Schwarz :

$\left[\int_0^x tf(t)f'(t)dt\right]^2 \leq \left(\int_0^x t^2 f^2(t)dt\right)\left(\int_0^x f'^2(t)dt\right)$ donne à la limite, (tout converge)

$\left[\int_0^{+\infty} tf(t)f'(t)dt\right]^2 \leq \left(\int_0^{\infty} t^2 f^2(t)dt\right)\left(\int_0^{+\infty} f'^2(t)dt\right)$ et en multipliant par 4 on a bien, vu la valeur de $\left(\int_0^{+\infty} f^2\right)^2$

$$\left(\int_0^{+\infty} f^2\right)^2 \leq 4\left(\int_0^{\infty} t^2 f^2(t)dt\right)\left(\int_0^{+\infty} f'^2(t)dt\right).$$

S'il y a égalité, le trinôme (en λ)

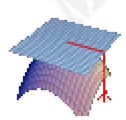
$$\lambda^2 \int_0^{+\infty} t^2 f^2(t)dt + 2\lambda \int_0^{+\infty} tf(t)f'(t)dt + \int_0^{+\infty} f'^2(t)dt$$

de discriminant : $\Delta = 4\left(\int_0^{+\infty} tf(t)f'(t)dt\right)^2 - 4\left(\int_0^{+\infty} t^2 f^2(t)dt\right)\left(\int_0^{+\infty} f'^2(t)dt\right)$;

comme $\Delta = 0$,

le trinôme admet une racine double $\lambda_0 = -\dfrac{\int_0^{+\infty} tf(t)f'(t)dt}{\int_0^{+\infty} t^2 f^2(t)dt}$; autrement dit, il existe λ_0 tel que $\int_0^{+\infty} \left[\lambda_0 tf(t) + f'(t)\right]^2 dt = 0$, d'où (fonctions continues) $\forall t \geq 0$ tel que $\lambda_0 tf(t) + f'(t) = 0$, équation différentielle linéaire qui sur $]0, +\infty[$ admet un espace de solution de dimension 1, donné par $f(t) = \mu\, exp\left(-\lambda_0 \dfrac{t^2}{2}\right)$, avec $\lambda_0 > 0$, (pour que $\int_0^{+\infty} f^2$ converge).

Or on vérifie que $\forall\ \alpha < 0$, (ici $\alpha = -\dfrac{\lambda_0}{2}$) la fonction $t \longmapsto f(t) = \mu\, e^{\alpha t^2}$, ($\mu$ quelconque) est telle que $\left(\int_0^{\infty} t^2 f^2(t)dt\right)$ converge, $\int_0^{+\infty} f'^2(t)dt$ converge aussi et que l'égalité est vérifiée : faire une intégration par parties dans $\int_0^{+\infty} t^2 e^{2\alpha t^2} dt$ en posant $du = t\, e^{2\alpha t^2} dt$.



Clefs de lecture IV

Pour que l'étudiant aborde directement les pics les plus hauts de la créativité scientifique et qu'on lui transmette cette impression de tournis, il est presque indispensable d'affronter des problèmes difficiles et passionnants. L'exercice suivant, loin d'être difficile, n'en est pas moins passionnant.

Exercice V

Soit $a \in]0, 1[$, $x_0 > 1$, $f \in C^0([x_0, +\infty[, \mathbb{R}_+)$. On suppose que, pour tout $x \geq x_0$, on a $2xf(x^2) \leq af(x)$.

Montrer que $\int_{x_0}^{+\infty} f(t)dt$ converge.

Ma solution

Sur $[x_0, x_0^2]$, ($x_0^2 > x_0$ car $x_0 > 1$) on a $2tf(t^2) \leq af(t)$ donc

$$\int_{x_0}^{x_0^2} 2tf(t^2)dt \leq a \int_{x_0}^{x_0^2} f(t)dt.$$

On calcule le 1er membre avec le changement de variable $t^2 = s$, d'où

$$0 \leq \int_{x_0^2}^{x_0^{(2^2)}} f(s)ds \leq a \int_{x_0}^{x_0^2} f(t)dt.$$

Par récurrence on prouve alors que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

on a

$$0 \leq u_n = \int_{x_0^{(2^n)}}^{x_0^{2^{n+1}}} f(s)ds \leq a^n \int_{x_0}^{x_0^2} f(t)dt,$$

car c'est vrai si $n = 1$, et si c'est vrai pour n, comme $\left[x_0^{(2^n)}, x_0^{2^{n+1}}\right] \subset [x_0, +\infty[$

sur lequel $2tf(t^2) \leq af(t)$, on a

$$\int_{x_0^{(2^n)}}^{x_0^{2^{n+1}}} 2tf(t^2)\,dt \leq a \int_{x_0^{(2^n)}}^{x_0^{2^{n+1}}} f(t)dt \leq a \times a^n \int_{x_0}^{x_0^2} f(t)dt.$$

Avec $t^2 = s$, le 1er membre vaut $\int_{x_0^{(2^n)}}^{x_0^{2^{n+1}}} f(s)ds.$

Comme $a \in]0, 1[$ la série des $a^n \int_{x_0}^{x_0^2} f(t)dt$ converge, donc cette de

$u_n = \int_{x_0^{(2^n)}}^{x_0^{2^{n+1}}} f(s)ds$ aussi et la somme partielle $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \int_{x_0^2}^{x_0^{2^{n+1}}} f$ admet

une limite si n tend vers l'infini.

Comme f est à valeurs positive, $F : x \longmapsto \int_{x_0^2}^{x} f$ est croissante, on a

$\lim_{n \to +\infty} x_0^{2^{n+1}} = +\infty$, $(x_0 > 1)$, l'existence de $\lim_{n \to +\infty} F\left(x_0^{2^{n+1}}\right)$ implique celle de

$\lim_{x \to +\infty} F(x)$, d'où le résultat.

Exercice VI

Soit f continue, 1 –périodique, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $\lambda > 0$, $\int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t) f(t)\, dt$ converge, limite lorsque λ tend vers 0^+.

Ma solution

Une fonction continue périodique est bornée sur $\mathbb{R}$, $(\|f\|_{+\infty} = \{|f(x)|\ ;\ x \in [0, 1]\})$, comme $\lim_{t \to +\infty} t^2 \exp(-\lambda t)\|f\|_{+\infty} = 0$ pour $\lambda > 0$, l'intégrale impropre converge.

En particulier,

$$F(\lambda) = \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t) f(t)\, dt = \lim_{n \to +\infty} \int_0^n \exp(-\lambda t)\, f(t) dt$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} \exp(-\lambda t)\, f(t) dt = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 \exp[-\lambda(t+k)] f(t) dt,$$

car f est 1-périodique. On a donc encore

$$F(\lambda) = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \exp(-\lambda k) \right) \int_0^1 \exp(-\lambda t)\, f(t) dt$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1 - e^{-\lambda n}}{1 - e^{-\lambda}} \int_0^1 \exp(-\lambda t)\, f(t) dt, \text{ soit, } (e^{-\lambda} < 1)$$

$$F(\lambda) = \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} \int_0^1 \exp(-\lambda t)\, f(t) dt$$

Or, (Taylor- Lagrange à l'ordre 2 entre 0 et $-\lambda t$, pour la fonction exponentielle), $\exists\, \theta \in\ ]0, 1[$, θ fonction de λ et de t, tel que :

$$e^{-\lambda t} = 1 - \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2} e^{-\theta \lambda t}$$

d'où

$$F(\lambda) = \frac{1}{\lambda + o(\lambda)} \int_0^1 f(t)dt - \lambda \int_0^1 tf(t)dt + \frac{\lambda^2}{2} \int_0^1 t^2 e^{-\theta\lambda t} f(t)dt$$

Avec $0 < e^{-\theta \lambda t} \leq 1$ puisque $-\theta \lambda t \leq 0$.

Si $\int_0^1 f(t)dt \neq 0$, $F(\lambda) \approx \dfrac{\int_0^1 f(t)dt}{\lambda}$ lorsque λ tend vers 0^+

donc $\lim\limits_{\lambda \to 0, \lambda > 0} F(\lambda) = \pm\infty$ (+ ou –, signe de $\int_0^1 f(t)dt$) ;

si $\int_0^1 f(t)dt = 0$, alors $\lim\limits_{x \to \lambda : 0, \lambda > 0} F(\lambda) = -\int_0^1 tf(t)dt$; et ce parce que

$$\left| \int_0^1 t^2 e^{-\theta\lambda t} f(t)dt \right| \leq \int_0^1 t^2 \|f\|_{+\infty} dt = \frac{\|f\|_{+\infty}}{3}.$$



Tout apprentissage est une histoire

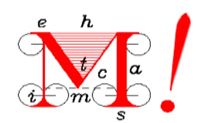
D'aucuns ont oublié que l'Analyse Mathématique pense aussi, mais cette pensée possède quelque chose de miraculeusement affectif. "Aucune philosophie, aucune analyse, aucun aphorisme, quelque profonds soient-ils, ne peuvent se comparer en plénitude et en intensité à une histoire bien racontée", écrit ainsi **Hannah Arendt**. Or tout exercice mathématique, nous raconte une histoire. L'école est, par excellence, le lieu où l'on doit apprendre à lire ces belles histoires. Sa mission première est de dépayser les élèves et de les transporter hors d'eux-mêmes.

Il peut par exemple être loisible, d'apprendre **pourquoi $\sqrt{2\pi t}\ e^{t}$ est-elle un équivalent de $\int_{0}^{+\infty}\left(\frac{te}{x}\right)^{x}dx$ au voisinage de $+\infty$,** ce n'est pas drôle du tout. C'est à la sueur de l'âme que cette chose-là s'apprend. La plupart des gens disent : « Mais, pourquoi ? Qu'est-ce que ça m'apporte ? »

Pour moi, formé à l'intelligence conceptuelle, l'Analyse Mathématique est avant toute chose une élucidation. Ma passion de lecteur est une passion de comprendre. Un exercice formateur comme celui-ci, m'aide à élargir ma palette. Sans la médiation des théories, je ne crois pas que je serais capable de voir le monde. En effet, l'expérience du sensible n'est pas une expérience immédiate. La routine, l'ennui, le morne accablement tiennent aussi au fait que nous manquons de concepts pour discerner les choses. Les nuances de la vie ne nous sont pas données par la vie mais par l'art, la littérature et par l'Analyse Mathématique.

L'Analyse Mathématique n'aurait aucun intérêt si elle se réduisait à des règles d'arithmétique. Sa grandeur et sa nécessité, c'est, de ressaisir, de nous faire connaître

cette réalité loin de laquelle nous vivons, de laquelle nous nous écartons de plus en plus au fur et à mesure que prend plus d'épaisseur et d'imperméabilité la connaissance conventionnelle que nous lui substituons. C'est cet émerveillement initiatique que je vise dans mon enseignement.



Quelques notes liminaires _ La poésie, on ne la fabrique pas, on la vit, on la respire, on l'habite. Tout s'écrit ici dans une espèce de plaisir secret, brisé, hivernal ; et, chaque fois, tout s'allège subitement.

- *La convergence dominée pour le cas d'un paramètre réel*

Théorème 1 _ Soient D une partie de $\mathbb{R}$ et I un intervalle réel ; soit α un point de $\overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D. Soit une famille $(f_t)_{t \in D}$ de fonctions de I dans $\mathbb{R}$, continues par morceaux. On suppose qu'il existe $\phi : I \longrightarrow \mathbb{R}$, continue par morceaux et intégrable, telle que, pour tout (t, x) de D $\times$ I, on a $|f_t(x)| \leq \phi(x)$ et qu'il existe une fonction g : de I $\longrightarrow \mathbb{R}$, continue par morceaux, telle que, pour tout x de I, $f_t(x)$ tend vers g(x) quand t tend vers α. Alors $\int_I f_t(x)\,dx$ tend vers $\int_I g(x)\,dx$ quand t tend vers α.

Proof _ Tout d'abord la majoration $|f_t| \leq \phi$ prouve l'intégrabilité sur I de chaque f_t ; de plus, par limite quand t tend vers α, on a aussi $|g| \leq \phi$ et g est intégrable sur I.

Soit (t_n) une suite de D tendant vers α ; la suite de fonctions (f_{tn}) vérifie les hypothèses du cours de convergence dominée : la fonction intégrable ϕ est la fonction dominatrice et la fonction g est fonction limite. Pour toute suite (t_n) de D tendant vers α, la suite de terme général $\int_I f_{tn}(x)\,dx$ tend vers $\int_I g(x)\,dx$; c'est dire, d'après la version séquentielle de la définition d'une limite de fonctions, que la fonction $t \longmapsto \int_I f_t(x)\,dx$ tend vers $\int_I g(x)\,dx$ quand t tend vers α.

- *Une concentration en* 0

Théorème 2 _ Soit $a > -1$; soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$. On suppose qu'il existe $b \geq 0$ tel que $f(x) = O\left(e^{bx}\right) \{x \longrightarrow +\infty\}$.

On pose $F_a(t) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} x^{a-1} f(x)dx$ pour $t > b$.

On a $\lim_{t \to +\infty} t^a F_a(t) = \Gamma(a) f(0)$.

Proof _ La fonction $g_t : x \longmapsto e^{-xt} x^{a-1} f(x)$ est intégrable pour tout $t > b$. En effet on a $g_t(x) = O\left(x^{a-1}\right)$ en 0 et $g_t(x) = o\left(e^{-yt}\right)$ en $+\infty$ pour n'importe quel y tel que $0 < y < x - b$.

Le changement de variable $x = \frac{u}{t}$ donne : $t^a F_a(t) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{a-1} f\left(\frac{u}{t}\right) du$.

Supposons d'abord f bornée ; la fonction $u \longmapsto e^{-u} u^{a-1} f\left(\frac{u}{t}\right)$ est alors majorée par $u \longmapsto e^{-u} u^{a-1} \| f \|_\infty$, qui est intégrable en $+\infty$. Donc, en vertu du **Théorème 1**, la limite de $t^a F_a(t)$ quand t tend vers $+\infty$ peut s'effectuer sous le signe intégral et cette limite est donc : $\int_0^{+\infty} e^{-u} u^{a-1} f(0) du = \Gamma(a) f(0)$.

Supposons maintenant $f(x) = O\left(e^{bx}\right)$ $\{x \longrightarrow +\infty\}$, $b \geq 0$.

Posons $g(x) = f(x)\, e^{-bx}$

Pour $t > b$, la fonction $\phi : x \longmapsto e^{-xt} x^{a-1} f(x)$ est continue sur $[0, +\infty[$ et majorée en module par $x \longmapsto \|g\|_\infty\, e^{-x(t-b)} x^{a-1}$, qui est intégrable en $+\infty$.

Donc cette fonction ϕ est intégrable sur $[0, +\infty[$. On peut donc poser :

$$F_a(t) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} x^{a-1} f(x) dx.$$

De plus :

$$F_a(t) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} x^{a-1} g(x) dx = G_a(t-b),$$

où

$$G_a(t) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} x^{a-1} g(x) dx.$$

D'après le cas précédent, $t^a G_a(t)$ tend vers $\Gamma(a)\, g(0) = \Gamma(a)\, f(0)$ quand t tend vers $+\infty$. Il revient au même de dire $t^a F_a(t)$ tend vers $\Gamma(a)\, f(0)$ quand t tend vers $+\infty$.

Ma solution à la question posée, pour ne pas l'éluder

Posons $f(x, t) = \left(\frac{te}{x}\right)^x$ et $g(x, t) = \text{Log}\,[f(x, t)] = x\,[\text{Log}\, t + 1 - \text{Log}\, x]$.

Pour $t > 0$ fixé, $f(\,.\,, t)$ par $f(0, t) = 1$ et $f(\,.\,, t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

Pour $x \geq e^2 t$, on a $g(x, t) \leq -x$, donc $f(x, t) = e^{-x}$. Il en résulte que $f(\,.\,, t)$, fonction positive, est intégrable sur $[0, +\infty[$.

La fonction $g(\,.\,, t)$ est $\mathcal{C}^1$ et $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \text{Log}\, t - \text{Log}\, x$, du signe de $t - x$. La fonction $f(\,.\,, t)$ admet son maximum pour $x = t$, ce maximum étant e^t.

Posons $\phi(t) = \int_0^{+\infty} f(x, t)dt$. On effectue le changement de variable $x = tu$ dans cette intégrale. $\phi(t) = t \int_0^{+\infty} e^{t\theta(u)}du$, où θ est la fonction $u \longmapsto u(1 - \text{Log}\, u)$.

Cette fonction θ, dont la dérivée est $u \longmapsto -\text{Log}\, u$, induit un $\mathcal{C}^1$ – difféomorphisme de $]0, 1[$ sur $]0, 1[$ et $\mathcal{C}^1$ – difféomorphisme de $]1, +\infty[$ sur $]-\infty, 1[$; notons α et β les difféomorphismes réciproques.

On a

$$\phi(t) = \phi_1(t) + \phi_2(t), \text{ où } \phi_1(t) = t\int_0^1 e^{t\theta(u)}du \text{ et } \phi_2(t) = t\int_1^{+\infty} e^{t\theta(u)}du.$$

Les changements de variables $u = \alpha(1 - v)$ dans la première intégrale et $u = \beta(1 - v)$ dans la deuxième montrent que :

$$\phi_1(t) = te^t \int_0^1 e^{-tv} \alpha'(1-v)dv \text{ et } \phi_2(t) = t\,e^t \int_0^{+\infty} e^{-tv}(-\beta'(1-v))dv.$$

On a $\alpha'(1-v) = -\dfrac{1}{\text{Log}\, u}$, avec $u = \alpha(1-v)$; ici $1-v = \theta(u)$, avec $u < 1$.

Quand u tend vers 1, on a $\alpha'(1-v) \sim \dfrac{1}{1-u}$; de plus $\theta(1) = 1$, $\theta'(1) = 0$ et $\theta''(1) = -1$; donc $1-v = \theta(u) = 1 - \dfrac{1}{2}(u-1)^2 + o(u-1)^2$, donc $v \sim \dfrac{1}{2}(u-1)^2$ et $1-u \sim 2^{1/2} v^{1/2}$.

Ainsi $\alpha'(1-v) = \dfrac{1}{2^{1/2} v^{1/2}} h(v)$ où h est un prolongement continu sur $[0, 1]$ avec $h(0) = 1$ ($\alpha'(1-v)$ tend vers 0 quand v tend vers 1, et h fait de même). On complète la définition de h en posant $h(v) = 0$ si $v \geq 1$ et on construit ainsi une fonction h continue et bornée sur $[0, +\infty[$. On applique le **Théorème 2** :

$$\phi_1(t) = \frac{1}{2^{1/2}} te^t \int_0^{+\infty} e^{-tv} v^{-1/2} h(v)dv \sim \frac{1}{2^{1/2}} te^t\, t^{-1/2}\, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\sim \frac{1}{2^{1/2}} e^t\, t^{1/2}\, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

D'une manière analogue, $\beta'(1-v) = -\dfrac{1}{\text{Log}\, u}$, avec $\begin{cases} u = \beta(1-v) \\ 1-v = \theta(u) \end{cases}$ avec $u > 1$.

Quand u tend vers 1, on a

$$\begin{cases} \beta'(1-v) \sim \dfrac{1}{1-u} \\ 1-v = \phi(u) = 1 - \dfrac{1}{2}(u-1)^2 + o(u-1)^2 \end{cases}$$

avec $\begin{cases} v \sim \frac{1}{2}(u-1)^2 \\ u - 1 \sim 2^{1/2} v^{1/2} \end{cases}$, puis $-\beta'(1-v) = \dfrac{1}{2^{1/2} v^{1/2}} k(v)$ où k a un prolongement continu sur $[0, +\infty[$ avec $k(0) = 1$.

Quand v tend vers $+\infty$, $\theta(u) = 1 - v \sim -\ u \operatorname{Log} u$;

donc successivement, $\begin{cases} v \sim u \operatorname{Log} u \\ \operatorname{Log} v = \operatorname{Log} u + \operatorname{Log}(\operatorname{Log} u) + o(1) \sim \operatorname{Log} u \\ -\beta'(1-v) \sim \dfrac{1}{\operatorname{Log} v} \\ k(v) = O\left(\dfrac{v^{1/2}}{\operatorname{Log} v}\right) \\ k(v) = O(e^{v}) \end{cases}$

On applique encore le Théorème 2 pour obtenir le même équivalent pour ϕ_1.

On a donc $\phi(t) \sim 2^{1/2} t^{1/2} e^{t} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \sim \sqrt{2\pi t}\, e^{t}$.

Je vais proposer à présent, un petit exercice, qui tient en un dixième de ligne, et qui peut nous conduire à ce qui fait pour moi, le charme de la démarche scientifique : l'esprit d'aventure, l'alignement des équations dans un enchaînement d'une élégance rigoureuse et puissante, parfaitement compréhensible, chercher soi-même les modes pédagogiques qui conviennent, ceux qui expliquent point par point, chaque étape d'une démonstration.

Une mésaventure personnelle m'a fait prendre conscience de l'importance de ce lent travail de maturation, de compréhension, de pénétration d'un problème. À la fin

d'une réunion de travail, d'un après-midi, un de mes collègues me posait une question qui lui semblait particulièrement originale, puisqu'il s'agissait de :

Donner en fonction de π, un équivalent du coefficient de X^n dans $(1 + X + X^2)^n$.

Il me fut facile de subodorer, qu'une intégrale parfaitement définie, et quelques majorations supplémentaires pourraient répondre à sa question. À ce point, je ressentis l'angoisse du mathématicien pris la main dans le sac. Car, ce que je disais dans un élan de foi, était un raisonnement mais pas encore une démonstration. Il serait temps de vérifier scrupuleusement mes intuitions.

$(1 + X + X^2)^n$ s'écrit ''taupinalement'' $\sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$.

Partant de $2\pi a_n = \int_0^{2\pi} \left(1 + e^{it} + e^{2it}\right)^n e^{-int}\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{-it} + 1 + e^{it}\right)^n dt$

$$= 2\int_0^{\pi} (1 + 2\cos t)^n dt.$$

Étudions un équivalent de $I_n = \int_0^{\pi} (1 + 2\cos t)^n dt$ par la méthode de Laplace.

Notons d'abord que pour tout $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a $I_n \sim \int_0^{a} (1 + 2\cos t)^n dt$, lorsque n tend vers l'infini.

En effet, on a $\int_0^{a} (1 + 2\cos t)^n dt \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos t)^n dt \geq \frac{a}{2}\left(1 + \cos\frac{a}{2}\right)^n$

et :

$$\left|\int_0^{\pi} (1 + 2\cos t)^n dt\right| \leq \pi(1 + 2\cos t)^n$$

ce qui permet de conclure, car ce dernier majorant est négligeable devant le minorant précédent.

Soit $\varepsilon > 0$! Comme $\text{Log}\,(1 + 2\cos t) = \text{Log}\,3 - \dfrac{t^2}{3} + o(t^2)$ _ quitte à diminuer a _ on peut supposer

$$\forall t \in [0, a],\ \text{Log}\,3 - t^2\left(\frac{1}{3} + \varepsilon\right) \leq \text{Log}\,(1 + 2\cos t) \leq \text{Log}\,3 - t^2\left(\frac{1}{3} - \varepsilon\right)$$

ce qui donne :

$$\int_0^a (1 + 2\cos t)^n dt \leq \int_0^a exp\left[n\,\text{Log}\,3 - nt^2\left(\frac{1}{3} - \varepsilon\right)\right] dt$$

avec, $\displaystyle\int_0^a exp\left[n\,\text{Log}\,3 - nt^2\left(\frac{1}{3} - \varepsilon\right)\right] dt = 3^n \int_0^a exp\left[-nt^2\left(\frac{1}{3} - \varepsilon\right)\right] dt$

$$= \frac{3^n}{2\sqrt{n\left(\frac{1}{3} - \varepsilon\right)}} \int_0^{na^2\left(\frac{1}{3} - \varepsilon\right)} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\, du \sim \frac{3^n}{\sqrt{n\left(\frac{1}{3} - \varepsilon\right)}}\sqrt{\pi} \text{ lorsque } n \longrightarrow +\infty$$

Comme, _quitte à diminuer ε, _ on a $\dfrac{1}{\sqrt{1 - 3\varepsilon}} < 1 + 2\varepsilon$, on en déduit que, pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit il existe n_0 tel que $\forall\, n \geq n_0,\ I_n \leq \dfrac{3^{n + 1/2}}{2\sqrt{n}}\sqrt{\pi}\,(1 + \varepsilon)$

Et comme, en outre, on peut avoir une minoration similaire on a $I_n \sim \dfrac{3^{n + 1/2}}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$ lorsque n tend vers l'infini, ce qui donne, $a_n \sim \dfrac{3^{n + 1/2}}{2} \times \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$ lorsque n tend vers l'infini.

Tout se joue, dans l'exercice suivant, sur des détails

Rolle fait quelque chose de très simple, puis dit : « Je compris que *cela* n'avait jamais été ni fait, ni pensé, ni dit. » _ Et soudain, tout me parut d'une virginité parfaite. Tout ce que j'avais appris sur les fonctions continues complètement absorbé dans le moment présent.

Soit f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, telle que $f(a) = f(b) = 0$.

Soit $c \notin [a, b]$. Montrer qu'il existe une tangente au graphe de f, (dans $\mathbb{R}^2$) passant par $(c, 0)$.

Ma solution

On $\xi \in]a, b[$ tel que la tangente d'équation $Y - f(\xi) = f'(\xi)(X - \xi)$ passe par $(c, 0)$, donc tel que $f'(\xi) = \dfrac{f(\xi)}{\xi - c}$.

Soit g : $\begin{cases} [a, b] \longmapsto \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x - c} \end{cases}$, elle est continue sur $[a, b]$, $c \notin [a, b]$) dérivable sur $]a, b[$, nulle en a et b.

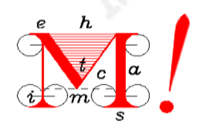
Le théorème de Rolle s'applique, donc il existe $\xi \in]a, b[$ tel que

$$g'(\xi) = 0 = \frac{f'(\xi)}{\xi - c} - \frac{f(\xi)}{(\xi - c)^2},$$

d'où

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi)}{\xi - c}:$$

c'est bien le résultat voulu. ***Quod erat demonstrandum***, comme aiment à le dire les latinistes.



Tout le monde connaît le théorème qui dit que : Si E est un espace vectoriel normé complet, la *convergence absolue*, (d'une série) implique la *convergence*.

Car, soit la série absolument convergente, de terme général u_n.

Alors

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall\, q \geq n_0,\ \forall p \geq q,\ \|u_q\| + \|u_{q+1}\| + \ldots + \|u_p\| \leq \varepsilon,$$

(Critère de Cauchy dans $\mathbb{R}$ pour la série des $\|u_n\|$), d'où *a fortiori*, on a :

$$\forall\, q \geq n_0,\ \forall p \geq q,\ \|u_q + u_{q+1} + \ldots + u_p\| \leq \varepsilon$$

(Inégalité triangulaire) : le critère de Cauchy appliqué cette fois à la série des u_n dans E complet permet de conclure.

La réciproque est fausse : une série peut être convergente sans l'être absolument, comme le montre le cas de la série dite harmonique de terme général réel $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

On a $|u_n| = \dfrac{1}{n+1}$, c'est le terme d'une série divergente, mais elle est convergente (c'est un classique).

Remarque _ ***Si E n'est pas complet, une série peut être absolument convergente sans être convergente.***

Chaque fois que l'on veut un espace vectoriel normé non complet, il faut passer à la dimension infinie, ($\mathbb{R}^n$ étant toujours complet) et on sait que $E = \mathbb{R}[X]$ n'est jamais complet.

On prend donc $E = \mathbb{R}[X]$, normé par la norme infinie : si $P(X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n$, (les a_n étant presque tous nuls), est un polynôme _ on pose $\|P\|_\infty = sup \left\{ |a_n|, n \in \mathbb{N} \right\}$, (existe car le cardinal de l'ensemble des n tels que $a_n \neq 0$ est fini) ;

Soit $u_n = \frac{X^n}{2^n}$, on a $\|u_n\|_\infty = \frac{1}{2^n}$: la série des U_n diverge dans E, car si le polynôme P était somme de la série des u_n, en notant $P = \sum_{n=0}^{P_0} a_n X^n$, ($P_0 = 0$ ou degré de P), pour tout $n > P_0$, le polynôme $U_n - P$ a son terme de degré $P_0 + 1$ de coefficient non nul, égal à $\frac{1}{2^{p_0+1}}$ donc $\|U_n - P\|_\infty \geq \frac{1}{2^{p_0+1}}$, (avec $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$).

Mais alors,

$$\exists\, \varepsilon = \frac{1}{2^{p_0+1}},\ \forall\, n_0 \in \mathbb{N}, \exists\, n \geq n_0,$$

tel que $\|U_n - P\|_\infty \geq \varepsilon$ (il suffit de prendre $n \geq P_0 + 1$ en fait), ceci nie le fait que la suite des sommes partielles U_n converge vers P.

Attention donc sur les **espaces non complets** à ne pas conclure trop vite, d'autant plus que dans l'esprit de votre programme, vous serez pratiquement toujours amenés à chercher la convergence absolue, non par masochisme, mais parce la

structure d'ordre sur $\mathbb{R}$ va nous permettre, pour les séries à termes positifs, d'établir des critères de comparaison dont on déduira des critères de convergence.

Une fois pour toute, si on parle de convergence absolue, l'espace E est complet.

Avant d'aborder la théorie de la mesure, voici une *Expérience de pensée* au sens d'Einstein, qui ne se réduit pas à la défense d'une démonstration, mais qui inclut la beauté et la culture.

J'imagine qu'on projette sur un mur, les tangentes d'inflexion de $y = \dfrac{\sin x}{x}$ qui restent tangentes à une courbe algébrique. Faut-il que je précise de quelle courbe il s'agit ?

Ma solution _ Vous ne pouvez pas faire des Mathématiques sans vous impliquer personnellement. Il faut dire "je". La Mathématique permet cela.

Soit $$f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) = \dfrac{\sin x}{x}, \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Comme f est paire, et que $(0, 1)$ n'est pas un point d'inflexion, je limiterai mon étude à $x > 0$.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*_+, \quad \begin{cases} f'(x) = \dfrac{\cos x}{x} - \dfrac{\sin x}{x^2} \\ f''(x) = \dfrac{\sin x}{x} - \dfrac{2\cos x}{x^2} + \dfrac{2\sin x}{x^3} \end{cases}$$

⇒) L'abscisse t d'un point d'inflexion vérifie :

$$f''(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin t}{t}\left(\frac{2}{t^2} - 1\right) = 2 \times \frac{\cos t}{t^2}.$$

$t = \frac{\pi}{2} + k$ avec $k \in \mathbb{Z}$, n'étant pas une solution,

$$f''(t) = 0 \Leftrightarrow \tan t = \frac{2t}{2 - t^2}$$

et par conséquent, $\cos^2 t = \dfrac{1}{1 + \dfrac{4t^2}{(2-t^2)^2}} = \dfrac{(2 - t^2)}{4 + t^4}$.

⇒) Le coefficient directeur de la tangente en ce point est :

$$f'(t) = \frac{\cos t}{t} - \frac{\sin t}{t^2} = \cos t\left(\frac{1}{t} - \frac{\tan t}{t^2}\right)$$

$$f'(t) = \cos t\left(\frac{1}{t} - \frac{2}{t(2 - t^2)}\right)$$

$$f'(t) = \cos t \times \frac{-t}{2 - t^2}.$$

⇒) L'ordonnée de ce point est : $f(t) = \dfrac{\sin t}{t} = \cos t \times \dfrac{2}{(2 - t^2)}$.

⇒) L'équation de la tangente au point d'inflexion est :

$$\begin{cases} y = \cos t \times \dfrac{-t}{2 - t^2} \times x + \cos t \times \dfrac{t^2}{2 - t^2} + \cos t \times \dfrac{2}{2 - t^2} \\ (2 - t^2)y + t\cos t x - \cos t(2 + t^2) = 0 \end{cases}.$$

⇒) Si $\cos t = \dfrac{2 - t^2}{\sqrt{4 + t^4}}$, l'équation devient

$$tx + \sqrt{4 + t^4}\, y - (2 + t^2) = 0 \qquad \textbf{(F}_1\textbf{)}$$

⇒) Si $\cos t = \dfrac{-2+t^2}{\sqrt{4+t^4}}$, l'équation devient

$$-\,tx + \sqrt{4+t^4}\;\; y + (2+t^2) = 0 \qquad \textbf{(F}_2\textbf{)}.$$

Les tangentes aux points d'inflexion appartiennent donc aux familles **(F_1)** et **(F_2)**, elles sont donc tangentes aux enveloppes de ces deux familles de droites.

Enveloppe de (F_1). _ Je pose :

$$a(t) = t \;\Rightarrow\; \frac{d\,a(t)}{dt} = 1, \quad b(t) = \sqrt{4+t^4}, \quad \text{soit} \quad \frac{d\,b(t)}{dt} = \frac{2t^3}{\sqrt{4+t^4}},$$

et

$$c(t) = -(2+t^2) \;\Rightarrow\; \frac{d\,c(t)}{dt} = -\,2t.$$

Je calcule $\delta(t) = \begin{vmatrix} t & \sqrt{4+t^4} \\ \cdots\cdot & \\ 1 & \dfrac{2t^3}{\sqrt{4+t^4}} \end{vmatrix}$ soit $\delta(t) = \dfrac{t^4-4}{\sqrt{4+t^4}}$

Pour $t \neq -\sqrt{2}$ et $t \neq \sqrt{2}$, la courbe paramétrée définie par

$$\begin{cases} x(t) = -\begin{vmatrix} -(2+t^2) & \sqrt{4+t^4} \\ -\,2t & \dfrac{2t^3}{\sqrt{4+t^4}} \end{vmatrix} \times \dfrac{\sqrt{4+t^4}}{t^4-4} \\ \cdots\cdots\cdot \\ y(t) = -\begin{vmatrix} t & -(2+t^2) \\ 1 & -\,2t \end{vmatrix} \times \dfrac{\sqrt{4+t^4}}{t^4-4} \end{cases}$$

est l'enveloppe de **(F_1)**,

d'où

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{4t}{t^2 + 2} \\ y(t) = \dfrac{\sqrt{4 + t^4}}{t^2 + 2} \end{cases},$$

soit,

$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{16t^2}{(t^2 + 2)^2} \\ y^2 = \dfrac{4 + t^4}{(t^2 + 2)^2} \end{cases}$$

donc,

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4 \\ \text{ou} \\ \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}.$$

L'enveloppe de **(F_1)** est incluse dans l'ellipse de centre O, d'équation $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

Par un même calcul, l'enveloppe de **(F_2)** est incluse dans la même ellipse. D'où les tangentes d'inflexion de $y = \dfrac{\sin x}{x}$ restent tangentes à l'ellipse de centre O, d'équation $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$. C'est ce qui me pousse à dire que :

Toute pensée sur le monde, toute observation et compréhension serait *réflexion*, application dans un miroir.

All thought about the world, all observation and understanding would be reflection, *mappings in a mirror.*

Il me semble que toutes les expériences capitales de mon existence ont comme horizon la poésie.

Le moment est venu de révéler un secret professionnel. Toute la question mes chers lectrices et lecteurs, est de savoir quelle finalité donner à ce destin d'Agrégé d'université.

Lui incombe-t-il une tâche ? Y a-t-il une provocation, un appel, une sommation ? Puis-je au moins répondre à une seule question ? Sans cette problématique, je ne serais pas Universitaire, je ne serais pas lecteur, je n'apprendrais pas à lire des Théorèmes par exemple, à mes étudiants. Je ne suis pour ma part que l'illustration du mot de **Pouchkine**, un *facteur* qui apporte à leurs destinataires que sont mes étudiants et mes lecteurs les lettres qu'il a recueillies auprès des grands, c'est là une tâche inouïe qui n'est pas purement contingente ou professionnelle, elle implique un sacrement de remémoration. Voici pourquoi l'enseignement m'a toujours été indispensable alors que j'aurais pu, matériellement parlant, l'abandonner à deux ou trois reprises. Mais dans l'organisation de mon existence, je l'ai toujours recherché comme un moyen de réunir autour de moi des lecteurs pour garder l'espoir, que certains continueront d'aimer les poètes, les scientifiques et les philosophes que j'ai tant aimés.

Être universitaire pour moi, c'est préparer son entendement à effacer une inquiétude sur le visage des étudiants qu'on enseigne.

C'est la raison pour laquelle, je loue dans ce fascicule, *"l'incandescence du concept à travers* un sens de la nuance que je n'abandonnerais jamais.

Dans la salle des professeurs, j'expose ma vision, mais je ne l'impose pas et j'ouvre ainsi un dialogue silencieux et stimulant avec des esprits curieux.

Dans le domaine de compétence qui est le mien, je considère que la science est avant toute chose une élucidation. Ma passion de transmetteur des connaissances est une passion de comprendre. L'intelligence laissée à elle-même n'est-elle pas un des vertiges de la modernité ? Le vertige du fonctionnalisme de la raison instrumentale ?

L'art par exemple, n'aurait aucun intérêt s'il se réduisait à sa fonction expressive. La Mathématique n'aurait aucun intérêt si elle se réduisait à des règles d'arithmétique. Sa grandeur et sa nécessité, c'est, de ressaisir, de nous faire connaître cette réalité loin de laquelle nous vivons, de laquelle nous nous écartons de plus en plus au fur et à mesure que prend plus d'épaisseur et d'imperméabilité la connaissance conventionnelle que nous lui substituons.

Le langage mathématique a été modelé par les concepts, c'est l'une de ses caractéristiques les plus admirables et les plus émouvantes. Aujourd'hui, dans certains établissements, l'enseignement de cette discipline s'émancipe de cette écrasante tutelle, comme en témoigne la place de plus en plus réduite des démonstrations dans les devoirs et même dans l'examen du Bac S. Je pense qu'il faut renouer ce lien. Je plaiderais donc pour une œuvre exotique, au sens d'étrangère à l'idiome communicationnel en vigueur. C'est-à-dire une altérité douce. Dans mon petit théâtre personnel, j'utilise volontiers, un style qui arrache les élèves à leur petit univers lexical. Mais ce style est dépouillé et ne comporte pas de difficultés particulières. Mieux, il invite l'étudiant à une promenade au sein de la grande récréation scientifique que doit être tout cours de Mathématiques. C'est le cas ici…



Partiel des licences -3 de Théorie de la Mesure

Sujet proposé par Théo Héikay

Exercice I

Soit (Ω, B, P) une espace de probabilité. Soit $f \in L^1(P)$ et ψ une fonction convexe de ℝ dans ℝ, supposée dérivable.

α) Montrer que

$$\psi\left(\int_\Omega f\,dP\right) \leq \int_\Omega \psi \circ f\,dP$$

On rappelle que pour tout $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe, il existe a_i et b_i tels que :

$$\psi(x) = \sup a_i x + b_i .$$

β) Dans le cas où $\Omega = \{1, \ldots n\}$, $B = \mathbb{P}(\Omega)$ et $P(i) = \frac{1}{n}$, montrer en choisissant judicieusement f et que si $y_1, \ldots, y_n$ sont des réels positifs, alors

$$(y_1\, y_2 \ldots y_n)^{1/n} \leq \frac{y_1 + \ldots y_n}{n}$$

Exercice II

α) Montrer que toute fonction réelle intégrable définie sur un espace mesuré (ξ, ζ, Π) est telle que : $\ell\Pi\left(\,|f| > \ell\,\right) \longrightarrow 0$ lorsque $\ell \longrightarrow +\infty$, mais qu'il existe des fonctions réelles mesurables non intégrables jouissant de cette propriété.

β) Montrer que si $(\xi) < +\infty$, une fonction réelle f est intégrable si et seulement si elle vérifie l'une des conditions suivantes :

$$(1) \quad \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \Pi(\,|f|\,) > n < +\infty$$

$$(2) \quad \sum_{n \in \mathbb{N}^*} n\, \Pi(\, n-1 \leq |f| \leq n)$$

Ces conditions restent elles nécessaires (resp. suffisantes) pour l'intégrabilité de f lorsque la mesure Π est infinie. Donner un ou plusieurs contre- exemples.

Problème

On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, et on considère une probabilité m sur $\mathbb{R}$ telle que $m(A) \leq K\, \lambda(A)$ pour tout borélien A, où K est une constante positive. L'objectif de ce problème est de montrer que m admet une densité.

1) Pour chaque entier $n \geq 1$ on considère les intervalles dyadiques

$$I(n, i) = \left]\frac{i}{2^n}, \frac{(i+1)}{2^n}\right[$$

(où, $i \in \mathbb{Z}$) ; soit également les nombres réels

$$a(n, i) = \frac{m(I(n, i))}{\lambda(I(n, i))}.$$

On définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par

$f_n = a(n, i)$ si $x \in \mathrm{I}(n, i)$ Montrer que f_n est borélienne, avec $0 \leq f_n \leq \mathrm{K}$.

2) Montrer que

$$\int f_n \, d\lambda = 1 \text{ et que } \int f_n^2 \, d\lambda \leq \mathrm{K}$$

3) Soit $n, k \in \mathbb{N}$. En remarquant que pour chaque $i \in \mathbb{Z}$ l'intervalle I (n, i) est réunion disjointe des intervalles $\mathrm{I}(n + k, j)$ pour j allant de $i2^k$ à $(i + 1)2^k - 1$, montrer que

$$\int f_n f_{n+k} \, d\lambda = \int f_n^2 \, d\lambda.$$

Déduire de la question précédente que

$$\int (f_{n+k} - f_n)^2 \, d\lambda = \int f^2_{n+k} \, d\lambda - \int f_n^2 \, d\lambda,$$

puis montrer que la suite $\int f_n^2 \, d\lambda$ converge vers une limite finie, et en déduire que f_n est une suite de Cauchy dans $L^2(\lambda)$.

4) Soit f la limite de la suite f_n dans $L^2(\lambda)$. Montrer que $0 \leq f \leq \mathrm{K}$ λ-p.p.

Montrer que

$$\int_A f_n \, d\lambda \longrightarrow \int_A f \, d\lambda \text{ pour tout borélien borné A.}$$

5) En calculant $\int_A f_n \, d\lambda$ lorsque A = I(m, i) et $n \geq$ m, déduire de la question précédente que $\int_A f \, d\lambda$ = m(A) pour tout A de la forme précédente, puis pour tout A intervalle dyadique borné (i.e. de la forme A =]s, t[avec s, t de la forme $i2^{-n}$) ; en déduire que f est la densité de m.



Engage your mind! Elevate your world!

Les solutions de l'examen – partiel se succèdent _ dans un papillotement, un mouvement, car la théorie de la mesure vit, palpite, traverse, étonne, et parfois étreint, un cœur mis à nu.

Exercice I

α) Soit φ une fonction convexe de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Il existe deux suites a_n et b_n telles que $\varphi(x) = \sup_{(n \in \mathbb{N})} a_n x + b_n$.

D'où :

$$\int_\Omega \varphi \circ f dp = \int_\Omega \sup_{n \in \mathbb{N}} (a_n f + b_n)\, dp \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n \int_\Omega f dp + b_n = \varphi\left(\int_\Omega f dp\right)$$

β) Soit $E = \{1, \dots, n\}$, $\xi = \mathbb{P}(E)$ et $m : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $m\{i\} = \frac{1}{n}$ pour tout i.

Soit $\varphi(x) = e^x$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(i) = \text{Log}\, y_i$.

$$\text{On a } \int f\, dm = \frac{1}{n}[\,\text{Log}\, y_1 + \dots + \text{Log}\, y_n\,] = \text{Log}\,(y_1 \dots y_n)^{1/n}$$

Donc

$$\varphi\left(\int_E fdm\right) = (y_1 \dots y_n)^{1/n}$$

Par ailleurs $\varphi \circ f\,(i) = y_i$.

$$\text{Donc } \int_E \varphi \circ f\, dm = \frac{y_1 + \dots + y_n}{n} .$$

D'où

$$((y_1 \dots y_n)^{1/n} \leq \frac{y_1 + \dots + y_n}{n} .$$

Exercice II

α) On a $\int |f|\, dm \geq \int_{|f|>a} |f|\, dm \geq a\, \mathrm{m}(|f|>a)$ pour tout $a>0$.

Donc

$$\lim_{a \to +\infty} \mathrm{m}(|f|>a) = 0$$

Il découle du théorème de Lebesgue que $\lim_{a \to +\infty} \int_{|f|>a} |f|\, dm = 0$

D'où $\lim_{a \to +\infty} a\, m(|f|>a) = 0$

Contre-exemples

a) Soit

$$\begin{cases} f(x) = 1 \text{ pour } x \geq n, \\ f(\mathrm{x}) = 0 \text{ si } x < n \end{cases}$$

f est *non intégrable*. $m\{x,\ f(x)>a\} = 0$ si $a \geq 1$. Donc $a\, m\{x, f(x)>a\} = 0$.

b) Soit

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \text{ pour } x > 0 \\ f(x) = 0 \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

La fonction f *n'est pas intégrable*.

Pourtant

$\lambda \{ \frac{1}{\sqrt{x}} > a \} = \lambda \{ x, \ -\frac{1}{a^2} > x \} = \frac{1}{a^2}$ et am $\{x, \frac{1}{\sqrt{x}} > a \} = \frac{1}{a}$ tend vers 0 lorsque a tend vers l'infini.

β) On a

$$\int_E (\,|\,f(x)\,| - 1)\, dm(x) \leq \int_E \sum_{n \in \mathbb{N}^*} 1_{|\,f(x)\,| > n}\, dm(x) \leq \int_E |\,f(x)\,|\, dm(x)$$

Donc si $m(E) < +\infty$,

$$\int_E |\,f(x)\,|\, dm(x) < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}^*} n\,(\,|\,f\,| > n\,) < \infty$$

En revanche

$$\text{si } m(E) = +\infty,\ \int_E |\,f(x)\,|\, dm(x) < +\infty \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}^*} n\,(\,|\,f\,| > n\,) < \infty$$

mais la réciproque n'est pas nécessairement vraie.

Reprenons l'exemple du a)

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2} \text{ si } x \geq n \\ f(x) = 0 \text{ si } x < n \end{cases}$$

$\forall\, n \geq 1,\ m(\,|\,f\,| > n\,) = 0$ *et pourtant f n'est pas intégrable.*

De même

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \text{ pour } x > 0 \\ f(x) = 0 \text{ pour } x \leq 0 \end{cases}$$

$$\lambda\left\{\frac{1}{\sqrt{x}} > n\right\} = \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \lambda\left\{\frac{1}{\sqrt{x}} > n\right\} < +\infty$$

et pourtant f n'est pas intégrable.

(2) On a

$$\int |f|\, dm = \sum_{n \geq 0} \int_{n \leq |f| \leq n+1} |f|\, dm$$

Donc

$$\sum_{n \geq 0} n\, \mathrm{m}(n \leq |f| \leq n+1) \leq \int |f|\, dm \leq \sum_{n \geq 0} (n+1)\, \mathrm{m}(n \leq |f| \leq n+1)$$

On voit donc que

$$\int |f|\, dm < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} n\, \mathrm{m}(n \leq |f| \leq n+1) < +\infty .$$



Solution du Problème

1) Chaque fonction $g_{n,i} = a(n, i)\chi_{I(n,i)}$ est borélienne, donc f_n, comme somme (dénombrable) sur i de ces fonctions, est aussi borélienne. Enfin on déduit

$$0 \leq a(n, i) \leq K \text{ de } 0 \leq m(A) \leq K\lambda(A), \text{ donc } 0 \leq f_n \leq K.$$

2) On a $\int f_n \, d\lambda = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \int g_{n,i} \, d\lambda$ (théorème de la limite monotone)

$$= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^n} a(n, i) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} m(I(n, i)) = m(\mathbb{R}) = 1.$$

Par ailleurs, $0 \leq f_n \leq K$ implique $\int f_n^2 \, d\lambda \leq K \int f_n \, d\lambda$, donc $\int f_n^2 \, d\lambda \leq K$.

3) Si $i\,2^k \leq j < (i+1)\,2^k$, la fonction $f_n f_{n+k}$ vaut $a(n, i)\, a(n+k, j)$ sur l'intervalle $I(n+k, j)$. Par suite,

$$\int f_n f_{n+k} \, d\lambda = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j = i2^k}^{(i+1)2^k} \frac{1}{2^{n+k}} a(n, i)\, a(n+k, j)$$

$$= \sum_{i \in \mathbb{Z}} a(n, i) \sum_{j = i\,2^k}^{(i+1)\,2^k} m(I(n+k, j)) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a(n, i)\, m(I(n, i))$$

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} a(n, i)^2 \frac{1}{2^n} = \int f_n^2 \, d\lambda .$$

4) Pour la première assertion il suffit de développer le carré $(f_{n+k} - f_n)^2$. On en déduit que la suite $\alpha_n = \int f_n^2 \, d\lambda$ est croissante, et comme elle est majorée par K d'après la question 2) on en déduit qu'elle converge.

Donc,

$\int f^2_{n+k} \, d\lambda - \int f_n^2 \, d\lambda = \alpha_{n+k} - \alpha_n \longrightarrow 0$ si n et donc $n + k$ tendent vers l'infini : cela montre que (f_n) est une suite de Cauchy dans $L^2(\lambda)$.

5) On sait qu'il existe une sous-suite f_{n_k} qui converge vers f λ-p.p., et comme $0 \leq f_{n_k} \leq K$ on en déduit que $0 \leq f \leq K$ λ-p.p. Soit ensuite un borélien A ; d'après l'inégalité de Schwarz, on a

$$\left| \int_A f_n \, d\lambda - \int_A f \, d\lambda \right| = \left| \int_A (f_n - f)\, \chi_A \, d\lambda \right| \leq \sqrt{\int_A (f_n - f)^2 \, d\lambda} \sqrt{\lambda(A)}$$

et le résultat en découle.

6) Soit $A = I(m, i)$; un calcul analogue à celui de la question 3) montre que si $n \geq m$, $\int_A f_n \, d\lambda = m(A)$; par suite $\int_A f \, d\lambda = m(A)$ d'après la question 5). Par additivité la même relation est vraie si A est un intervalle dyadique borné. Comme $A \longrightarrow m(A)$ et $A \longrightarrow \int_A f \, d\lambda$ sont des mesures coïncidant sur les intervalles dyadiques bornés, elles coïncident pour tout borélien, ce qui revient à dire qu'elles sont égales et f est la densité de m.

La perpétuelle nouveauté *des Espaces* L^P(E, B, μ)

PROBLÈME

Soit (χ, B, μ) un espace mesuré, μ(X) = 1 et $f \in L^1(\chi, B, \mu)$, $f \geq 0$.

α) Montrer que

$$\text{Log}\, f \text{ est mesurable et } \int_\chi^* \text{Log}\, f\, d\mu \leq \text{Log}\left(\int_\chi f\, d\mu\right)$$

où $\int_\chi^* F\, d\mu = \int_\chi F\, d\mu$ si F est intégrable $\int_\chi F\, d\mu = -\infty$ sinon.

$$\left(\text{On pourra observer que Log } t \leq t - 1 \text{ et intégrer cette inégalité avec } \frac{f}{\|f\|_{L^1}}\right)$$

β) Montrer qu'il y a égalité dans α) si, et seulement si, $f = C^{te} > 0$.

$$\left(\text{En particulier l'égalité entraîne Log } f(x) - \text{Log } \|f\| - \frac{f(x)}{\|f\|} + 1 = 0.\right)$$

γ) Montrer que

$$\lim_{r \to 0} \|f\|_r = \exp\left[\int_\chi^* \text{Log}\, f\, d\mu\right]$$

(Se ramener à $\frac{1}{r}\int_\chi \left(f^r - 1\right) d\mu \longrightarrow \int_\chi^* \text{Log}\, f\, d\mu$; montrer alors que $\frac{f^r - 1}{r}$ converge en décroissant vers Log f, quand $r \longrightarrow 0$).

Exercice I

Montrer que si K est l'ensemble de Cantor, χ_K est Riemann intégrable, mais que $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ n'est pas Riemann intégrable.

Exercice II

Soit $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$, f λ- localement intégrable.

Montrer que

$$\int_0^N f\,d\lambda \text{ n'a pas de limite quand } N \longrightarrow +\infty \text{ entraîne } \int_0^{+\infty} |f|\,d\lambda = +\infty.$$

Étudier la réciproque.

« ***Ma raison perçoit mieux ce qui compte le plus*** » **Les Bacchantes d'Euripide**

Travaillant sur la théorie de la Mesure et l'intégrale abstraite, je ne peux m'empêcher de penser, au sujet de son auteur, à cette merveilleuse formule de **Rimbaud**, « Je suis un inventeur bien autrement méritant que tous ceux qui m'ont précédé ; un musicien même, qui ai trouvé quelque chose comme la clef de l'amour. » De mon point de vue, **Lebesgue** a crée ce que j'appelle un « *espace libre pour le jeu du temps* ». L'intégrale de **Lebesgue** : mesure parfaite et réinventée, raison merveilleuse et imprévue.

Ma correction

α) supposons $f \geq 0$.

$(\text{Log} f)^{-1}(-\infty) = f^{-1}(0)$ est mesurable et sur le complémentaire Log f est la composée d'une fonction mesurable et d'une fonction continue, donc mesurable, d'où Log f est mesurable.

Vérifions que $\text{Log}\, t \leq t - 1,\ t \geq 0$, or la dérivée de $\varphi(t) = 1 - t + \text{Log}\, t$ est égal à $\frac{1}{t} - 1$, φ est maximal en $t = 1$ et $\varphi(1) = 0$, donc $\varphi(t) \leq 0,\ t \geq 0$.

Ajoutons, pour la suite, que $\varphi(t) < 0$, pour $t \neq 1$.

On a alors, pour tout x, $\text{Log} \dfrac{f(x)}{||f||_{L^1}} \leq \dfrac{f(x)}{||f||_{L^1}} - 1$ et, par intégration, avec $\mu(X) = 1$, on obtient le résultat.

β) Soit $\psi(x) = \varphi\left(\dfrac{f(x)}{||f||_{L^1}}\right) = \text{Log} \dfrac{f(x)}{||f||_{L^1}} + 1$. On a vu, dans la question α) que

$$\psi \leq 0 \text{ et } \int_X \psi \, d\mu \leq 0.$$

L'hypothèse ici est $\int_X \psi \, d\mu = 0$, d'où $\psi = 0$, μ-pp, c'est-à-dire

$$\varphi\left(\frac{f(x)}{||f||_{L^1}}\right) = 0, \ \ \mu\text{-pp}.$$

D'après le α), on a nécessairement $f(x) = ||f||_{L^1} = C^{te}$, μ- pp.

La réciproque est immédiate.

γ) $||f||_r = \left(\int_X f^r d\mu\right)^{1/r} = \exp\left(\dfrac{1}{r} \text{Log}\left(\int_X f^r d\mu\right)\right)$ puisque $f > 0$, μ-pp, f^r a pour limite 1 quand $r \longrightarrow 0$, et la convergence est dominée par $1 + f$, pour $r < 1$, en effet :

ou bien $f < 1$ et alors $f^r < 1$; ou bien $f > 1$ et alors $f^r < f$, donc $\int_\chi f^r \, d\mu \longrightarrow 1$, quand $r \longrightarrow 0$, et $\frac{1}{r} \operatorname{Log} \int_\chi f^r \, d\mu \sim \frac{1}{r}\left(\int_\chi (f^r - 1)\, d\mu\right)$, puisque $\mu(X) = 1$.

Par suite, il suffit de montrer que l'on a

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r}\left(\int_\chi (f^r - 1)\, d\mu\right) = \int_\chi^* \operatorname{Log} f \, d\mu$$

Considérons la fonction $r \longmapsto \frac{t^r - 1}{r} = \varphi_t(r)$.

On a $(\varphi_t)'(r) = \frac{t^r . \operatorname{Log} t^r - t^r + 1}{r^2} \geq 0$, puisque $\psi(u) = u . \operatorname{Log} u - u + 1$, qui a pour dérivée $\operatorname{Log} u$, est minimal en $u = 1$ et $\psi(1) = 0$.

Ainsi $\varphi_f(r)$ est une fonction croissante de r et tend vers $\operatorname{Log} f$ quand r tend vers 0.

Alors, ou bien $\lim \int_\chi \varphi_f(r) d\mu(t) = -\infty$, d'où le résultat ;

ou bien $\lim \int_\chi \varphi_f(r) d\mu(t)$ est finie et le théorème de Beppo-Levi permet de conclure.

Exercice I

* χ_K *est Riemann- intégrable* En effet, $\forall x \in \complement K$, par construction même de K, il existe un intervalle contenant x et contenu dans $\complement K$, par conséquent, χ_K est continue sur les éléments de $\complement K$. Comme χ_K est bornée elle est donc Riemann-intégrable.

* $\chi_{\mathbb{Q} \cap [0, 1]}$ *n'est pas Riemann-intégrable.*

En effet,

$$\int_0^1 \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}\, dx = \inf_{\{I_K\}} \left(\sum_{k=1}^{n} \sup \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}(x) \mid I_k \mid \right) = 1$$

($\{I_K\}$ étant une partition de [0, 1] formée d'intervalles) et

$$\int_0^1 \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}\, dx = \sup_{\{I_K\}} \left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Inf}\, \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}(x) \mid I_k \mid \right) = 0.$$

Exercice II

Supposons que $\int_0^{+\infty} \mid f \mid d\lambda < +\infty$. Alors comme f est mesurable, f est intégrable et, par conséquent, $\int_0^{N} f\, d\lambda$ converge, lorsque $N \longrightarrow +\infty$, vers $\int_0^{+\infty} f\, d\lambda$, puisque la suite $\{ \mid \chi_{[0, N]} \, f \mid \}$ est dominée par $\mid f \mid$.

La condition est donc nécessaire, mais elle n'est pas suffisante ; en effet, on peut trouver des fonctions telles que

$$\int_0^{+\infty} \mid f \mid d\lambda = +\infty \text{ et } \int_0^{N} f\, d\lambda$$

converge quand $N \longrightarrow +\infty$.

Par exemple, $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, ou bien , $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \chi_{[n\,,\, n+1]}(x)\, dx$.

" Le récit nombreux des jours de l'amour ", a dit une fois Hölderlin.

Comment laisser passer ce *récit nombreux* ? C'est cela qui m'est demandé, en somme, rien d'autre. Un cours est une aventure physique et philosophique qui a pour but la poésie pratique, c'est-à-dire la plus grande liberté possible. En commentant mon propre cours, j'ai voulu ouvrir une fissure dans les hautes murailles édifiées par l'Analyse Mathématique.

Derrière ce mur, nous devinons à présent un décor enveloppé d'un peu de lumière, un paysage miroitant, subtil à l'infini, dont l'horizon est immensément exaltant. À la lumière de ces connaissances, bien des mystères s'éclairent d'une interprétation nouvelle, rencontrent une sorte de *cohérence*, sans rien perdre, cependant, de leur vérité originelle. Mon pari au sens pascalien du terme, est que si le lecteur prend la peine de me suivre, il aura une idée assez précise des thèmes que j'aborde ici, pour décider s'il souhaite ou non y aller voir de plus près.

Le surgissement d'un œcuménisme de l'enchantement

À l'école, au collège, au lycée, comment un professeur fera-t-il aimer la science à ses élèves sans en cultiver pour lui-même le goût – fût-ce à un niveau élémentaire –, comme un professeur de lettres cultive la littérature ? Toutes les enquêtes internationales corrèlent la qualité de l'enseignement aux efforts durables de développement professionnel des professeurs. Ce qui est jugé indispensable pour un ingénieur ou un médecin qui, dans leur pratique professionnelle, doivent constamment dépasser les savoirs acquis au cours des études initiales, pourquoi ne le serait-ce pas pour un professeur ?

Inventer, créer fonctionnent de concert avec les idées et la rigueur. Chaque belle métaphore ouvre littéralement des portes sur l'être.

Δ !! _ Essayons de montrer à nos étudiants, que derrière les équations se cachent des audaces de l'imagination, des sentiments impérieux, qui transcendent la logique et donnent à la science une touche artistique.

Δ !! _ L'école de l'espoir est celle où on montrerait à l'élève qu'il se construit un partenariat fructueux entre l'imagination et la rationalité. Autrement dit, qu'un jeu s'organise entre d'une part les questions et les solutions produites par l'imagination et d'autre part les contraintes de cohérence du formalisme et de l'observation.

Δ !! _ Nos étudiants s'apercevront alors que, la science naît de la tension entre ces deux pôles, mais ne se confond pas avec l'un ou l'autre. Autrement dit, elle n'est ni une pure contrainte, ni le droit systématique au rêve…

Gardons-nous de prendre aux étudiants, le lest du bonheur pour la grande traversée de la mer qu'est la vie.

La lecture des théories Mathématiques est une amitié, c'est-à-dire une conversation ininterrompue, un va-et-vient entre le concept, la confidence et la réflexion partagée sur l'univers mathématique. Le plaisir d'être d'accord et le plaisir, plus grand encore, d'être bousculé et d'être contredit. L'ami, c'est celle ou celui qui vous éclaire sur vous-même, qui vous libère de vous-même, qui vous fait cadeau de pensées, de formulations, dont vous seriez incapable.

Mes articles sont émaillés d'anecdotes et de métaphores, car j'ai compris avec le temps, en dix ans d'enseignement, qu'on ne transmet pas quelque chose, mais soi. J'ai donc essayé d'être moi-même. Mais il n'est pas facile d'être soi-même !

C'est la raison pour laquelle j'utilise le « je ». Ceci n'a rien à voir avec la grande maladie démocratique : le narcissisme. En démocratie, sous le régime de l'égalité des conditions, comme disait Tocqueville, on ne peut plus se reposer de son être sur son appartenance. On doit faire ses preuves et sans cesse recommencer. Sartre a merveilleusement résumé le tourment du narcisse moderne : en face de ce qu'on a été, on est toujours la même chose, rien. Moins certains sont sûrs d'eux-mêmes, plus ils se déclarent admirables. Je ne suis pas ainsi, cela ne veut pas dire que je sois exempt de tout narcissisme, cela veut dire plutôt que mon inquiétude narcissique ne s'en laisse pas conter.

Derrière le « je », il y a pour ainsi dire, une forme de civilité : l'humilité. Je pense qu'il y a quelque chose d'impoli à faire soi-même son propre éloge. La Mathématique nous enseigne l'humilité, mais aussi ce qu'il y a de légitime dans le désir des belles actions. J'ai donc choisi de faire l'éloge de la pensée conceptuelle. C'est aussi ainsi qu'on peut sortir de soi-même, de son égoïsme, de son intérêt étroit. Mais les anciens étaient assez intelligents pour distinguer le héros de celui qui relate les actions du héros. Il ne revient pas au héros de faire son propre éloge mais il nous revient, à nous, de faire l'éloge des héros. Les héros qu'on trouve dans mes articles, sont des êtres mathématiques.

La publication de mes articles à caractère pédagogique, est une manière de lutter contre le narcissisme, mais plus encore un recours contre ma propre finitude. Plus j'avance et plus je prends conscience de tout ce que je ne suis pas et de tout ce que je

ne sais pas. J'ai peur que mon intelligence se sclérose. Grâce à l'enseignement, la recherche et la publication, je peux élargir mon champ de vision, faire appel à d'autres voix, voir le monde avec l'aide d'autres regards. La Mathématique et la science nous renvoient à notre propre médiocrité. Il est difficile, quand on passe le plus clair de son temps avec Lebesgue, Einstein ou la théorie de l'intégrale abstraite, de se tambouriner la poitrine. La chose que l'on sait, face au génie, c'est qu'on n'est pas soi-même un génie.

La valeur est liée à la connaissance _ *Contraction du temps sur lui-même*

Je me souviens très bien de mes premières joies intellectuelles, lorsque j'étais adolescent, au collège puis au lycée : une démonstration Mathématique qui devenait soudain lumineuse ; la lecture des premières pages de la *Critique de la raison pure* de **Kant** qui me faisait découvrir l'argumentation philosophique … À chaque fois, c'était comme une révélation, un choc : l'émotion me faisait palpiter et courir jusqu'au frigidaire familial pour y chercher le calme d'un jus d'orange.

Comprendre, sentir la portée d'une idée, découvrir la clé d'un raisonnement, cela m'a toujours procuré un bonheur sans équivalent : j'aime que les choses me soient rendues claires. Je me souviens de certains de mes professeurs remarquables de ce point de vue : ils veillaient à ce que la lampe du jeune entendement des élèves que nous étions soit toujours remplie d'huile et brûle. Par effet de contraste, je détestais les discours fumeux. Sans le savoir, j'étais déjà disciple de **Wittgenstein** : « Ce qui peut se dire peut se dire clairement. »

La physique ne m'a attiré que tardivement. Au lycée, je n'étais pas à l'aise avec l'aspect expérimental des choses. Je n'ai pas le moindre don de bricoleur : au cours des travaux pratiques, la seule idée d'avoir à mettre sous tension un circuit électrique que j'avais monté moi-même me terrifiait, surtout après que j'eus involontairement « cramé » un oscilloscope de grande valeur. Mais j'étais bon en Maths, et comme la physique nous était enseignée comme une sorte de Mathématique appliquée, j'étais également bon en physique : dans les devoirs, il ne s'agissait que de poser des équations, de les résoudre, et d'encadrer le résultat en rouge.

À l'*Ecole Centrale* de Paris, je me suis vite demandé que faire par la suite. Tout m'intéressait un peu et rien ne m'intéressait vraiment. J'étais encore un être indéterminé. Alors je me suis cherché au travers de toutes sortes d'expériences : je suis devenu militant au D.A.L. (Droit Au Logement), je sortais beaucoup, je m'entraînais aussi très dur au football, jusqu'à l'épuisement.

Après deux années de Classes Préparatoires, je voulais découvrir l'humanité et cerner mes limites. Je lisais énormément, deux ou trois livres par semaine. J'étais très déçu par l'enseignement : trop de disciplines techniques, toutes présentées dans une perspective utilitariste, pas assez d'envol intellectuel, pas assez de « souffle ». J'ai compris qu'il fallait m'oxygéner ailleurs.

J'ai commencé à suivre des cours de philosophie à la Sorbonne, en auditeur libre, par amitié pour une jeune fille qui préparait l'Agrégation (je prenais des notes pour elle). Là, je vibrais : enfin, on me parlait du monde, de la vie, de l'homme, de la pensée. Mais je sentais aussi que la philosophie s'accordait trop de degrés de liberté, que pour elle trop de systèmes étaient possibles. Les raisonnements étaient rigoureux, certes, mais il y avait toujours de l'arbitraire dans les principes. C'est à ce moment là,

au cours d'un séjour à l'hôpital, après ma première opération du genou, que cette amie bien inspirée m'offrit un livre merveilleux de **Michel Serres** : Le Système de **Leibniz** et ses modèles Mathématiques.

Je découvris ainsi que la Mathématique, quand elle est prise dans son entier, avec son histoire, ses problèmes, ses personnages, est un véritable levain de culture et, surtout, qu'elle permet « des découvertes philosophiques négatives », pour parler comme **Maurice Merleau-Ponty**, en montrant que certaines affirmations qui prétendent à une validité philosophique n'en ont pas en vérité.

La Mathématique n'est pas une philosophie, mais elle peut détruire certains préjugés de la pensée philosophique. Elle ne pose pas de concepts de droit, mais elle est capable d'inventer des nouveaux concepts pour pallier la carence des concepts traditionnels. Elle provoque ainsi la philosophie, s'incruste dans certains de ses débats et y joue parfois le rôle d'arbitre. J'ai dévoré ce livre en annotant chacune de ses pages. Il m'a précipité vers les problèmes d'interprétation de la physique quantique, qui me préoccuperont pendant toute la rédaction de ma thèse de Doctorat d'Astrophysique.

Pourquoi la physique quantique m'a-t-elle tant fasciné ? Sans doute parce que, plutôt que de fournir des idées toutes faites, elle montre la difficulté d'une pensée ferme et, surtout, elle permet d'apercevoir sous un jour nouveau certains horizons trop connus de la pensée.

Michel Serres m'entraîna, grâce à un jeu subtil de correspondances et d'échos, dans un univers où s'entremêlent plaisir et érudition.

Ma lecture du livre de **Michel Serres** m'a aidé à être fasciné par **Leibniz**, car celui-ci instaure un équilibre subtil entre ses découvertes scientifiques géniales et sa métaphysique. Sa pensée est systématique, mais à la différence de **Descartes** (avec sa méthode) ou **Hegel** (avec son système), rien n'est clos et figé chez lui : c'est la souplesse et l'innovation permanente, et il ne vous force jamais à réfléchir comme lui. Il n'emprisonne pas, il libère et aère. Et puis, surtout, quel anticipateur ! En Mathématiques, bien sûr. C'est d'ailleurs ce qui ma poussé d'écrire un mémoire de Maîtrise en épistémologie sur lui, car j'étais convaincu que **Leibniz** pouvait nous aider à penser la grande révolution des Mathématiques modernes. En effet, il est, avec d'autres (**Newton** en l'occurrence), excusez du peu, le père du Calcul Infinitésimal, mais aussi le grand précurseur de la théorie des ensembles. Cependant, il ne s'arrête pas là : en physique, il crée la mécanique avec la notion de « forces vives » et il a l'intuition très nette de la relativité. Dans le domaine de la biologie, il est le premier à être ovo-spermiste, c'est-à-dire à soutenir que l'embryon résulte de l'action conjuguée du spermatozoïde et de l'ovule. Même en politique, il peut être considéré comme le père de l'Europe, lui l'Allemand qui écrit en français et propose aux souverains de son temps des projets transnationaux inédits. C'est un homme qui annonce les Lumières, un savant qui correspond avec toute l'Europe, un encyclopédiste à la curiosité insatiable : philologue, il s'intéresse aussi bien à l'histoire, au droit, à la chimie qu'à la musique _ d'ailleurs, saviez-vous que **Bach** composait ses fugues d'après les règles du Calcul Combinatoire de **Leibniz** ? Il est le prototype de l'esprit universel, qui jette sans arrêt des ponts, fondés sur la raison, entre les peuples et entre les disciplines. À un moment de sa vie, **Leibniz** échange

des lettres avec des jésuites installés en Chine, car, dans une visée œcuménique, il est favorable à l'évangélisation de ce pays.

Les jésuites lui envoient un manuscrit écrit en chinois archaïque, que les contemporains n'arrivent pas à décrypter. Eh bien, **Leibniz**, lui, parvient à le déchiffrer, et c'est au cours de ce travail qu'il découvre l'alphabet binaire (les suites de 0 et de 1) qui sert aujourd'hui de base au fonctionnement de nos ordinateurs !

Les Hautes Mathématiques sont l'autre musique de la pensée (George Steiner)

Je n'ai pas résisté aux charmes des Mathématiques, de leurs concepts, des théories qui décrivent si bien une réalité. J'éprouve beaucoup de plaisir à manier des équations. En plus, celles-ci résultent de connaissances qui remontent à l'Antiquité. Elles passent de génération en génération, et les legs successifs ne les détériorent jamais. Au contraire, ils les enrichissent. Tout est dit en quelques lettres et quelques chiffres. Visuellement, c'est esthétique comme l'écriture chinoise ou la calligraphie arabe. Ce sont les Mathématiques qui, au moment de me décider pour une carrière, m'ont fait choisir l'Astrophysique.

Lors d'un cours de physique, une équation m'avait particulièrement frappé parce qu'on la retrouve dans des domaines très divers. Elle décrit en effet aussi bien les variations de température que la distance parcourue par une voiture, la diminution de la longueur d'une bougie allumée et beaucoup d'autres choses encore. J'avais cherché à comprendre comment la même formule pouvait s'appliquer à tous ces phénomènes. L'explication tient en ces quelques mots : les Mathématiques permettent d'extraire la structure logique commune à de nombreux faits différents. Je retrouve effectivement ce que **Galilée** avait découvert quatre siècles auparavant et

qui lui faisait dire que les Mathématiques sont le langage de l'Univers. Ce fut au XX[ème] siècle le crédo d'**Einstein**.

C'est ce qui me motive aujourd'hui, à poursuivre mes recherches à L'Institut de Mathématiques de Luminy de l'Université de la Méditerranée (Aix-Marseille II), parallèlement à mon enseignement en Master I et mes recherches en Cosmologie.

Je n'ignore rien de ce qui se dit au détour d'une conversation : « Quand les scientifiques nous parlent, on a souvent l'impression que cela est trop compliqué pour nous. Cela nous passe tellement au-dessus de la tête que ça n'est même pas la peine de chercher à comprendre. »

Ces réactions, combien de fois les ai-je entendues ! Et j'en ai retenu l'appel implicite, bien décidé à ce que les réalités scientifiques dont j'ai connaissance ne restent pas hermétiques à mes élèves/étudiants. J'ai choisi de créer www.**math-question-center.com/** parce que je n'accepte pas cette désaffection à l'égard de la science.

I could not believe my eyes : for what was said there was not only what had to be said but was expressed in the most articulate and forceful way! _ Théo Héikay-Universitaire/pdf

Je n'en cru pas mes yeux: mais ce qui était dit là, c'était ce qu'il fallait dire, non seulement du mieux mais du plus haut qu'on pût le dire ! (*Rires*)

Université d'Aix-Marseille
· AMU ·